Digitized by Google

EX MUNIFICENTIA

FERDINANDI III. M. E. D.

DIE 9 Junii 1791.

123

XII

EBERT 1773

Obst. Sr. Jacob. Sa
gione nelle Scienze
sofiche e matematiche
Francfort Lipsia 17

B 7

Digitized by Google

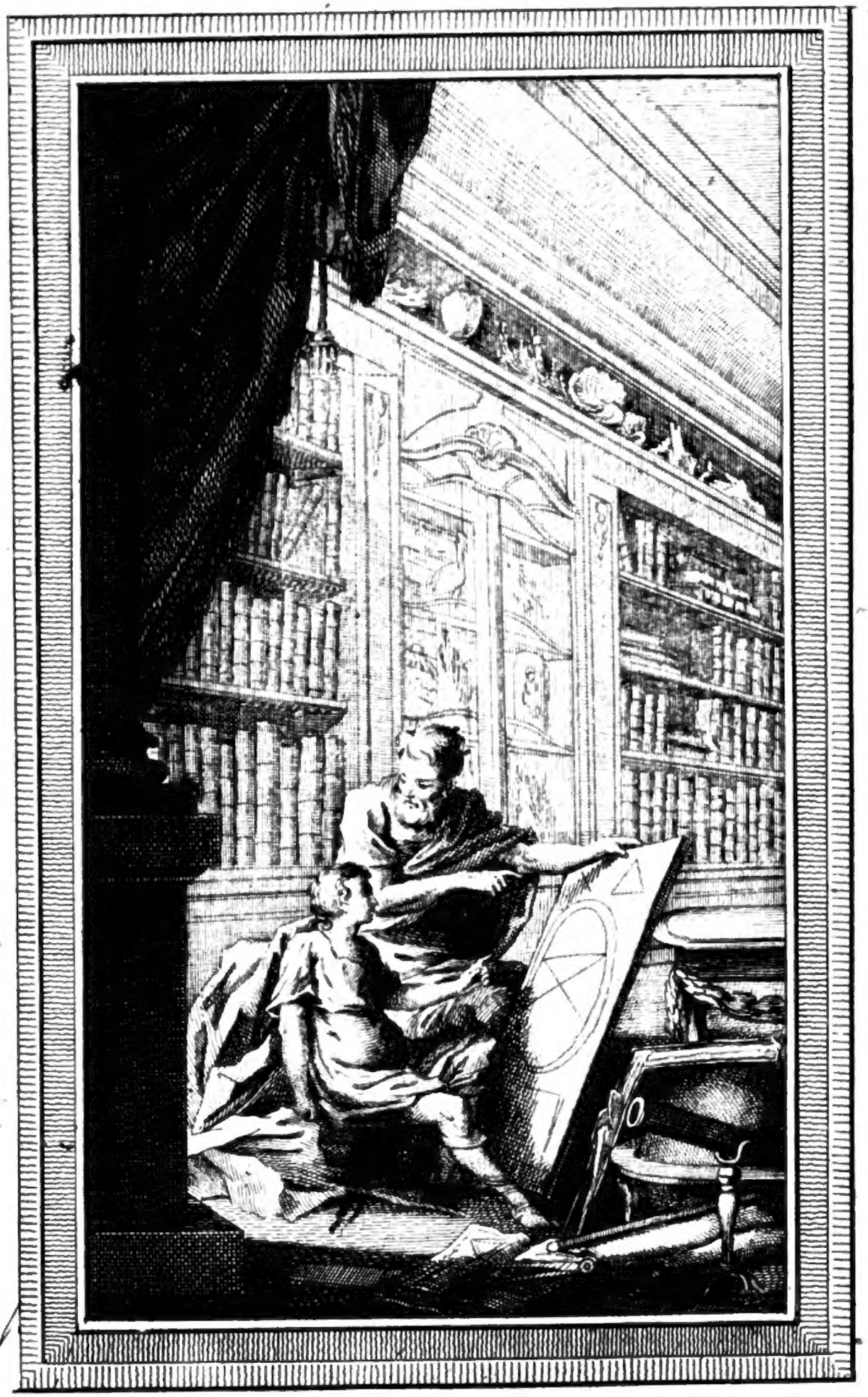
9.6.258

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Nähere Unterweisung

in den

philosophischen und mathematischen

Wissenschaften

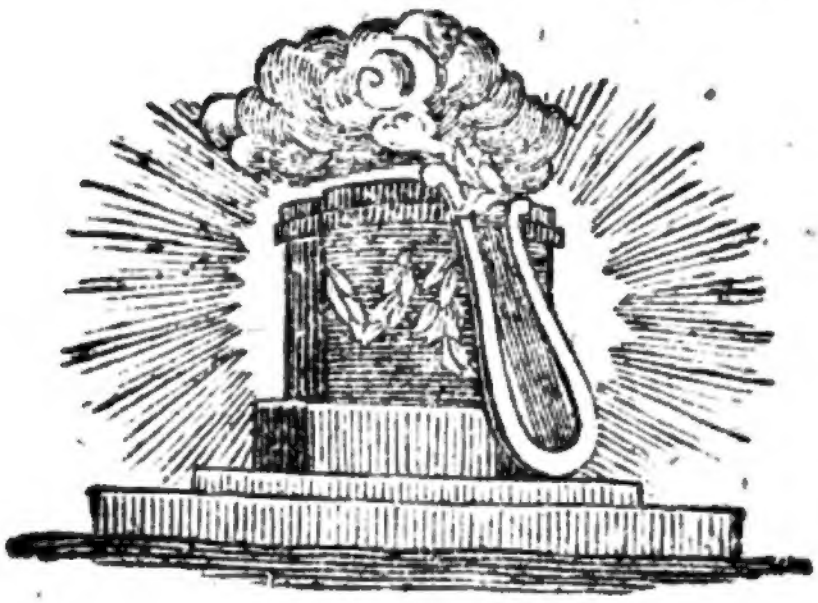
für die obern Classen

der Schulen und Gymnasien

herausgegeben von

Johann Jacob Ebert,

Professor zu Wittenberg.



Mit Kupfern.

Frankfurt und Leipzig,

bey Christian Gottlieb Herteln,

1773.

Digitized by Google

Digitized by Google

Den

Hochgebohrnen, Hochwohlgebohrnen,

Hochwürdigen, Wohlgebohrnen,

und

Hochgelahrten Herren,

des

Churfürstl. Sächß. Ober-Consistorii

zu Dresden

Hochverordneten

Herren Präsidenten,

Vice-Präsidenten

und

Räthen

Seinen gnädigen und Hochgebietenden

Herren

überreicht

dieſe Schrift

mit

der vollkommenſten Ehrerbietung

der

Verfaſſer.

Vorbericht.

Diese nähere Unterweisung in den philoso-
phischen und mathematischen Wissen-
schaften soll eigentlich nichts anders
seyn, als eine etwas vollständigere und syste-
matische Ausführung einiger Kapitel der Un-
terweisung in den vornehmsten Künsten und
Wissenschaften zum Nutzen der niedern Schu-
len, welche vor zwey Jahren in eben diesem
Verlage herausgekommen, und mit Beyfall auf-
genommen worden ist. Das Verlangen ver-
schiedner Personen, welche sich dieses Buches
bey dem ersten Unterrichte ihrer Kinder oder

Vorbericht.

Untergebenen mit Vortheil bedient haben, hat den Herrn Verleger zu der Ausgabe der gegenwärtigen nähern Unterweisung veranlaßt, welche also für diejenigen Jünglinge bestimmt ist, welche sich bereits aus der ersten Unterweisung einen Begriff von den Wissenschaften gemacht haben. Ich weis wohl, daß viele die Ausgabe der gegenwärtigen Schrift für ganz überflüßig halten werden, da es in unsern Zeiten an Büchern nicht mangelt, welche den Unterricht der Schuljugend betreffen. Ich kann auch nicht läugnen, daß es verschiedene Bücher dieser Art giebt, die vortrefflich sind, und mit welchen ich meine geringe Arbeit nicht vergleichen will. Allein, die Erziehung und Unterweisung der Jugend, ist, wie Jedermann einräumt, eine so wichtige und für ein ganzes Land so nothwendige Sache, daß ich es immer

für

für beſſer halte, wenn man etwas thut, das vielleicht entbehrlich iſt, als wenn man etwas unterläßt, das doch einigen Nutzen ſchaffen könnte.

Da die vorhergehende Unterweiſung einen andern Verfaſſer hat, deſſen Namen ich aber wider ſeinen Willen nicht bekannt machen will, und da auch überhaupt die Abſicht jener und der gegenwärtigen Schrift nicht völlig einerley iſt; ſo wird man ſich nicht wundern, daß die philoſophiſchen und mathematiſchen Wiſſenſchaften hier in einer andern Ordnung abgehandelt worden ſind. Wenn man, wie der Herr Verfaſſer der Unterweiſung, blos die Abſicht hat, jungen Leuten einen hiſtoriſchen kurzen Begriff von den Wiſſenſchaften beyzubringen, ſo halte ich ſelbſt die Ordnung, in welcher er

die Wissenschaften auf einander folgen läßt, für eine der schicklichsten und vortheilhaftesten. Sollen aber die vornehmsten Wahrheiten der Wissenschaften im Zusammenhange und mit Gründen vorgetragen werden, so würde es unmöglich seyn, diese Absicht völlig zu erreichen, wenn man den Anfang mit der natürlichen Geschichte, Naturlehre und Cosmographie machen wollte, weil diese Wissenschaften schon viele Sätze aus der Mathematik und den übrigen Theilen der Philosophie voraussetzen.

Ich behaupte unterdessen ganz und gar nicht, daß die Ordnung, nach welcher ich die hier erklärten Wissenschaften vorgetragen habe, allen übrigen vorzuziehen sey, deren sich andre Gelehrte in ihren Lehrbüchern zu bedienen pflegen, indem ich völlig überzeugt bin, daß man

auch nach einer andern Ordnung eben die Absicht erhalten könne.

Einige würden es vielleicht lieber gesehen haben, wenn ich den Anfang mit der Mathematik, und nicht mit der Logik, gemacht hätte. Es ist auch nicht zu läugnen, daß der Verstand durch die mathematischen Wissenschaften am meisten geschärft wird, weswegen auch die Alten gemeiniglich mit der Geometrie den Anfang ihres Unterrichts zu machen pflegten. Allein, da mich die Erfahrung mehr als einmal gelehrt hat, daß Jünglinge von mittelmäßigem Genie, welche doch überall die größte Anzahl ausmachen, die mathematischen Erklärungen und Beweise nicht allemal vollkommen verstehen lernen, wenn sie noch keine deutliche Begriffe von den vornehmsten Sätzen der Vernunftlehre ha-

ben, so schien mirs höchst nöthig, die Anfangsgründe dieser Wissenschaft noch vor der Mathematik abzuhandeln. Wer sich bey dem mündlichen Unterrichte einer andern Ordnung bedienen will, und bey manchen Genies ist es wirklich nöthig, der wird dem ohngeachtet die gegenwärtige Unterweisung dabey gebrauchen können.

Von der Ordnung der übrigen Wissenschaften finde ich nichts zu erinnern, zumal da in der That viel Willkührliches in dieser Sache ist, daher ich mich mit niemand über diesen Punkt in einen Streit einlassen werde.

Ich habe die Theile der angewandten Mathematik, und einige Theile der Philosophie weggelassen, weil die kurze Zeit, welche itzt die

meisten

meiſten jungen Leute auf den niedern Schulen zubringen, zu dem Unterricht in allen mathematiſchen und philoſophiſchen Wiſſenſchaften nicht hinreichend iſt, wofern ſie nicht das Studium der Sprachen, der Geſchichte und der Alterthümer vernachläßigen ſollen, welches doch nach der Religion in der That die vorzüglichſte Beſchäfftigung junger Leute, die ſich dem Studiren widmen, auf den niedern Schulen ſeyn muß. Sollten aber einige dieſen Mangel für einen Fehler anſehen, ſo wird der Herr Verleger kein Bedenken tragen, durch einen neuen Band dieſen Fehler zu verbeſſern, wenn die gegenwärtige Arbeit eine geneigte Aufnahme finden ſollte.

Ich wünſche übrigens nichts ſo ſehr, als daß diejenigen Gelehrten, welche ſich ſelbſt mit der

Vorbericht.

Unterweisung junger Leute beschäfftigen, und diese Blätter des Durchlesens würdigen sollten, mir aufrichtig ihre Erinnerungen mittheilen möchten, weil ich sehr weit von der Thorheit entfernt bin, meine Arbeit für untadelhaft zu halten. Geschrieben in der Leipziger Oster-Messe 1773.

Nähere

Nähere Unterweiſung

in den

philoſophiſchen und mathematiſchen

Wiſſenſchaften.

Als der

Zweyte Theil der Unterweiſung

in den

Künſten und Wiſſenſchaften

zum Nutzen der niedern Schulen.

Digitized by Google

Vorbericht.

Von der Philoſophie überhaupt.

§. 1.

Das Wort Philoſophie wird zwar heut zu Tage von Gelehrten und Ungelehrten ſo häufig gebraucht, daß eine Erklärung davon beynahe überflüßig ſcheinen könnte. Demohngeachtet aber wiſſen die wenigſten, was ſie bey dieſem Worte eigentlich denken ſollen, und ſelbſt unter den Philoſophen wird noch bisweilen über die Erklärung der Philoſophie geſtritten. Wir müſſen alſo wohl vor allen Dingen unterſuchen, was für eine Wiſſenſchaft durch dieſes griechiſche Wort, das ſeinem Urſprunge nach blos eine Liebe zur Weißheit bedeutet, nach dem allgemeinen Sprachgebrauch der Gelehrten verſtanden wird.

Vorbericht.

§. 2.

So viel weiß jedermann, daß sich die Philosophie nur mit solchen Dingen beschäftiget, die wir mit der blossen Vernunft, ohne die Hülfe einer Offenbahrung, erforschen können. Allein nicht alle Vernunftwahrheiten gehören zur Philosophie, wie auch der ungeübteste leicht einsehen wird, der nur einige andere Wissenschaften sich vorstellt. Es fragt sich also, was sind das für Vernunftwahrheiten, die zusammen genommen diese Wissenschaft ausmachen? Diese Frage wird man sich beantworten können, wenn man einige Beyspiele mit Aufmerksamkeit betrachtet. Jedermann rechnet die Untersuchungen über die Beschaffenheit des Weltgebäudes, über das Wesen der Geister, über die Eigenschaften der Planeten, ja über die Eigenschaften der geringsten Würmer zur Philosophie, aber niemand hält es für eine philosophische Abhandlung, wenn von der Einrichtung des Türkischen Reichs, von den Egyptischen Pyramiden, von der Beschaffenheit der grösten Palläste, und von andern Wirkungen der menschlichen Geschicklichkeit gehandelt wird. Wenn wir nun untersuchen, worinnen die Gegenstände, welche man zur Philosophie rechnet, von den übrigen unterschieden sind, so werden wir finden, daß jene von der ursprünglichen Einrichtung des Schöpfers, diese hingegen von der willkührlichen Einrichtung der Menschen herrühren. Die Philosophie soll also nach dem Sprachgebrauch diejenige zusammenhängende Sammlung von Vernunftwahrheiten seyn, worinnen die Natur und Eigenschaften derjenigen Dinge untersucht werden, die von der Natur selbst, und nicht von der veränderlichen Einrichtung der Menschen ihren Ursprung haben.

§. 3.

§. 3.

Da diese Wissenschaft, wie man schon aus ihrer Erklärung sehen kann, von einem ansehnlichen Umfange ist, so hat man sie in verschiedene Theile zergliedert, und dieselben wieder als besondere Wissenschaften abgehandelt. Alles nun, was in der Philosophie gelehret wird, dient entweder blos zur Aufklärung unsers Verstandes, in welchem Falle sie theoretisch genannt wird, oder zur Verbesserung unsers Willens, wo man ihr den Namen der practischen Philosophie zu geben pflegt.

Sowohl der theoretische als auch der practische Theil wird wieder aufs neue eingetheilet, nur daß man nicht bey allen Lehrern dieser Wissenschaft einerley Anzahl und Ordnung der Theile antrift. Die vornehmsten Theile der theoretischen Philosophie sind nach der gewöhnlichsten Eintheilung folgende. Weil man bey der Untersuchung der Eigenschaften der Dinge nothwendig wissen muß, wie man durch den Gebrauch seines Verstandes die Wahrheit finden und den Irrthum vermeiden könne, so fängt man gemeiniglich mit demjenigen Theile an, worinnen dieses gelehrt wird, und welchen man die **Logik** oder **Vernunftlehre** nennet. Die Eigenschaften, welche allen Dingen gemein sind, werden in der **Ontologie**, das Wesen eines Geistes in der **Pnevmatologie**, die Lehre von GOtt in der **natürlichen Theologie**, und die allgemeine Lehre von der Welt in der **Cosmologie** erklärt. Diese vier Wissenschaften Ontologie, Pnevmatologie, natürliche Theologie und Cosmologie zusammen genommen machen die **Metaphysik** aus.

Vorbericht.

Die Eigenschaften der Körper untersucht eigentlich die **Physik** oder **Naturlehre**, zu welcher man auch die **Naturgeschichte** rechnen kann, die eigentlich nur eine Beschreibung und Eintheilung der natürlichen Körper enthält. Diejenige Eigenschaft der Körper aber, die man **Grösse** nennt, und die auch andern Dingen zukömmt, wird in einer besondern Wissenschaft abgehandelt, die den Namen der **Mathematik** erhalten hat, und die man meistentheils wegen ihres grossen Umfangs von der Philosophie absondert, ohngeachtet sie sonst mit Recht als ein Theil derselben angesehen wird.

Die practische Philosophie wird gemeiniglich in das **Recht der Natur**, die **Ethik** und **Politik** eingetheilet. Das **Recht der Natur** erklärt die Pflichten und Verbindlichkeiten, die sich durch die Kräfte der Vernunft erkennen lassen; die **Ethik** oder **Moral** zeigt uns die Mittel zur Tugend an; und die **Politik** lehrt uns, wie wir unsre Handlungen der Klugheit gemäß einrichten sollen.

Die

Die Vernunftlehre.

Erstes Capitel.

Von der Logik überhaupt.

§. 1.

Wir erlangen zwar durch die bloſſe Uebung und durch den Umgang mit andern, ſchon eine gewiſſe Fertigkeit, unſern Verſtand in Erkenntniß der Wahrheit zu gebrauchen, welche man die **natürliche Logik** nennet; allein da man ſich der Regeln, nach denen man zu denken pflegt, nicht deutlich bewuſt, und folglich ſehr oft der Gefahr zu irren ausgeſetzt iſt, wenn man ſich mit dieſer bloſſen natürlichen Geſchicklichkeit behelfen muß; ſo läßt ſich leicht einſehen, daß diejenige Wiſſenſchaft, worinnen die Geſetze unſers Denkens deutlich auseinander geſetzt werden, d. i. die ſogenannte künſtliche Logik nicht unter die überflüßigen Dinge zu zählen ſey. Man muß ſich daher billig verwundern, daß es ſelbſt unter den Gelehrten viel Feinde dieſer Wiſſenſchaft giebt. „Wenn das Auge ſiehet, ſagen einige, wenn das „Ohr höret, und wenn alle andere Kräfte, ohne ei„ner Vorſchrift nöthig zu haben, ihre Geſchäfte or„dentlich verwalten, ſo wird auch der Verſtand,

„ ohne Beyhülfe der Logik, die Wahrheit beurthei-
„ len und finden können". Dieser Einwurf, so scheinbar er auch vielleicht einigen vorkommen wird, ist von keiner grossen Wichtigkeit. Man darf ihn nur genau erwägen, so wird er eher ein Beyspiel geben, den Nutzen der Logik zu erläutern, als ihn zu widerlegen. Es ist wahr, das Auge sieht, das Ohr höret, auch ohne Regeln und Vorschrift; aber die Erfahrung lehrt hinlänglich, daß unser Auge besser sieht, wenn es durch Vorschriften geleitet wird, daß unser Ohr besser und richtiger hört, wenn es von dem Künstler unterrichtet worden. Wer die Optik studirt hat, worinnen die Regeln des Sehens erklärt werden, wird mehr Gegenstände bemerken, weniger im Sehen irren, als derjenige, der unwissend in dieser Wissenschaft ist, indem er die Art und Weise kennt, wie man der Schwachheit des Auges zu Hülfe kommen, und wie man das, was man wirklich sieht, von dem, was man zu sehen scheinet, unterscheiden könne. Wer die Tonkunst nach Regeln gelernt hat, wird weit weniger Fehler begehen, als derjenige, der keine deutliche Einsicht in die Regeln dieser Kunst besitzet, und sich blos durch Uebung eine Fertigkeit darinnen erworben hat. Eben so verhält sichs auch mit unserm Verstande. Wir können ihn, auch ohne Vorschrift einer Logik, zur Erkenntniß der Wahrheit gebrauchen, aber sein Gebrauch wird gewisser und richtiger, wenn wir uns durch diese Wissenschaft eine deutliche Erkenntniß derjenigen Vorschriften verschaffen, nach welchen er sich im Denken richtet.

§. 2.

Unsere Seele ist mit verschiedenen Fähigkeiten begabt, die uns die Erkenntniß der Wahrheit mög-

lich

lich machen, wie uns schon aus der blossen Erfahrung bekannt ist, ehe wir noch das geringste von der philosophischen Seelenlehre wissen. Wir haben eine Kraft, durch Hülfe gewisser Theile unsers Körpers Vorstellungen von gegenwärtigen Dingen zu erhalten. Wir sind ferner im Stande, diese Vorstellungen, die man **Begriffe** oder **Ideen** zu nennen pflegt, eine Zeitlang fortzusetzen, und uns dieselben, so oft es uns gefällt, wieder lebhaft zu machen, wenn auch die Dinge selbst nicht mehr gegenwärtig sind. Diese Vorstellungen können wir wieder auf verschiedene Art verbinden und mit einander vergleichen, um daraus alle unsre Wissenschaft und Erkenntniß zusammen zu setzen. Den Zustand, wenn wir Vorstellungen von gegenwärtigen Dingen haben, die auf uns wirken, nennen wir überhaupt **Empfindung**; woraus sich also leicht einsehen läßt, was die **Empfindungskraft** sey; und zwar eine **äusserliche Empfindung**, wenn der Gegenstand, der empfunden wird, etwas ist, das ausserhalb unsrer Seele sich befindet, eine **innerliche** hingegen, wenn wir etwas empfinden, das in unsrer Seele selbst vorgehet. Die **Kraft**, Begriffe fortzusetzen, heißt das **Gedächtniß**; welches auch den Namen der **Erinnerungskraft** erhält, wenn wir dadurch erkennen, daß ein Begriff derjenige sey, den wir schon zu einer andern Zeit bey gewissen Umständen gehabt haben. Die Kraft, abwesende Dinge sich so vorzustellen, als ob sie gegenwärtig wären, nennt man die **Einbildungskraft**. Das Zusammensetzen und Vergleichen der Begriffe geschieht durch die **Beurtheilungskraft**, die sonst auch **Verstand** oder **Vernunft** genannt wird, ohngeachtet einige diesen Wörtern noch eine andere Bedeutung geben, und z. E. durch den Verstand

überhaupt die Fähigkeit Begriffe zu haben, verstehen. Aus diesen Hauptkräften unsrer Seele entstehen also eigentlich alle unsre Gedanken.

§. 3.

Man pflegt insgemein drey Wirkungen des menschlichen Verstandes anzunehmen, **Begriffe**, **Urtheile** oder **Sätze**, und **Schlüsse**. **Begriffe** oder **Ideen** heissen die blossen Vorstellungen der Dinge in unsrer Seele, wie schon oben bemerkt worden ist. **Urtheile** oder **Sätze** entstehen, wenn wir Begriffe mit einander vergleichen, und **Schlüsse**, wenn wir aus zween oder mehr Sätzen einen dritten herleiten. Diese drey Wirkungen des Verstandes also, wodurch die Erkenntniß der Wahrheit möglich wird, müssen in der Logik vorzüglich erklärt werden.

Zweytes Capitel.
Von den Begriffen.

§. 4.

Unsre ersten Begriffe erhalten wir eigentlich durch die Empfindung; alle übrigen Begriffe, die sich noch in unsrer Seele befinden, entstehen entweder durch die Theilung oder durch die Zusammensetzung, oder durch die Vergleichung derselben unter einander. Man pflegt der Deutlichkeit wegen die Begriffe, wovon die Worte, wie bekannt, die gewöhnlichsten Zeichen sind, theils in Ansehung ihres Inhalts, theils in Ansehung ihrer Erzeugungsart, theils auch in Ansehung ihrer Vollkommenheit in verschiedene Classen einzutheilen. Wir wollen itzt nur die nothwendigsten Eintheilungen kürzlich durchgehen.

§. 5.

§. 5.

Stellt ein Begriff ein wirkliches oder einzelnes Ding vor, das man ein **Individuum** zu nennen pflegt, so heißt er ein **Individual-Begriff**: enthält er aber etwas, das verschiednen wirklichen Dingen gemein ist, so erhält er den Namen eines **allgemeinen oder abstracten Begriffes**. Z. E. der Name **Virgilius** zeigt einen Individual-Begriff, hingegen das Wort **Poet** einen allgemeinen Begriff an; denn bey dem Wort Virgilius denke ich mir einen einzigen Menschen, bey dem Wort Poet aber eine Eigenschaft, die vielen Menschen zukömmt.

§. 6.

Die allgemeinen oder abstracten Begriffe erlangen wir also, indem wir von denjenigen Begriffen, die uns die Empfindung verschaffet, gewisse Theile oder **Umstände** weglassen, und das übrige, was auch in andern Individual-Begriffen angetroffen wird, besonders betrachten, welches man in der Sprache der Logik **abstrahiren** zu nennen pflegt. So entsteht z. E. der allgemeine Begriff **Philosoph** durch die Abstraction aus den Individual-Begriffen, **Plato, Aristoteles, Leibnitz**, u. s. f.

§. 7.

Bey den allgemeinen Begriffen, die wir aus der Betrachtung einzelner Dinge durch die Abstraction erhalten haben, läßt sich wieder eine neue Abstraction vornehmen, wodurch solche Begriffe entstehen, die noch allgemeiner sind, als die vorhergehenden. Z. E. aus den allgemeinen Begriffen, Philosoph, Theolog, Jurist, Medicus u. s. f. entsteht auf

dieſe Weiſe der Begriff **ein Gelehrter**, der dasjenige enthält, was in allen vorhergehenden gefunden wird. Man nennt einen allgemeinen Begriff, welcher die Aehnlichkeit einzelner Dinge enthält, eine **Art** oder **Species**, und einen ſolchen, der die Aehnlichkeit verſchiedener Arten anzeigt, eine **Gattung**, **Geſchlecht** oder **Genus**. Bildet man ſich durch eine wiederholte Abſtraction aus den Gattungen noch allgemeinere Begriffe, ſo heiſſen dieſe **höhere** und jene **niedere Gattungen.**

§. 8.

Aus der Verbindung der Begriffe, die wir durch die Empfindung und Abſtraction erhalten, entſtehen eine Menge zuſammengeſetzter Ideen, unter denen oft einige ſolche Dinge vorſtellen, die nirgends zu finden ſind, z. E. aus der Zuſammenſetzung der Begriffe eines geflügelten Thieres und eines Pferdes iſt der Begriff **Pegaſus**; aus den Begriffen Fiſch und Frauenzimmer der Begriff **Sirene** gemacht worden. Man kann alſo aus dem Daſeyn einer Idee in unſrer Seele nicht wiſſen, ob ein ſolches Ding in der Natur wirklich vorhanden ſey, das durch dieſe Idee abgebildet wird.

§. 9.

Begriffe, welche nicht anzeigen, was eine Sache an und vor ſich ſelbſt, ſondern was ſie in Anſehung einer andern iſt, nennt man **relative**, die übrigen aber **abſolute** Begriffe. Von der erſten Art ſind die Begriffe **Klein**, **Groß**, **Vater**, **Sohn**, **Herr**, **Diener**; von der andern hingegen **Menſch**, **Thier**, **Erde** u. ſ. f. Dieſer Unterſchied iſt deswegen ſehr wohl zu merken, weil aus der Verwirrung

der

der absoluten und relativen Begriffe oft sehr unnöthige Streitigkeiten entstanden sind.

§. 10.

Unter den Vollkommenheiten der Begriffe ist vorzüglich die **Klarheit** und **Deutlichkeit** zu merken. Durch die **Klarheit** versteht man diejenige Beschaffenheit derselben, vermöge welcher man sie von allen andern unterscheiden kann, durch die **Deutlichkeit** aber, wenn man sich zugleich der Merkmale bewußt ist, die diesen Unterschied ausmachen. Ein deutlicher Begriff ist daher auch ein klarer, aber ein klarer nicht allemal ein deutlicher Begriff. Z. E. Wir können das Süsse von dem Bittern, das Rothe von dem Blauen sehr genau unterscheiden; wir sind aber nicht im Stande die Merkmale anzugeben, in welchen dieser Unterschied bestehet, unsre Begriffe von diesen Dingen sind also klar, aber nicht deutlich. Hingegen **Bewegung** und **Ruhe** können wir nicht nur von einander unterscheiden, sondern wir wissen auch, daß in der Veränderung des Raums der Unterschied zwischen beyden bestehet. Wir haben daher von der Bewegung und Ruhe deutliche Ideen.

Drittes Capitel.

Von den Sätzen.

§. 11.

Wenn wir Begriffe, z. E. **Luft** und **Körper**, oder **Luft** und **Geist** mit einander vergleichen, und derselben Verschiedenheit oder Uebereinstimmung erkennen, so entstehet ein **Urtheil** oder **Satz**; Z. E. **die Luft ist ein Körper**; **die Luft**

ist

ist kein **Geist**. Hieraus ist also klar, daß bey einem Satze drey Theile unterschieden werden können, nemlich die beyden Begriffe, die man mit einander vergleicht, und der Begriff, welcher das Verhältniß derselben ausdrückt. Derjenige, den man als den Hauptbegriff, als den Gegenstand der Betrachtung ansiehet, wie in den vorigen Beyspielen die **Luft**, wird das **Subject**, der andre, den man mit diesem vergleicht, z. E. in dem vorhergehenden ersten Satze **Körper**, und in dem andern **Geist**, das **Prädicat**, und der dritte, wodurch man das Verhältniß derselben anzeiget, nemlich das Wort ist oder ist nicht die **Copula** oder das **Verbindungszeichen** genannt. Diejenigen Gelehrten, welche nur zwey Theile in einem Satze annehmen, rechnen die Copula mit zum Prädicat.

§. 12.

Sowohl im Reden als auch im Schreiben pflegt man bisweilen des Nachdrucks oder andrer Ursachen wegen, die vorige Ordnung der Theile zu ändern, daher man bey der Beurtheilung eines Satzes, wenn man das Subject suchen will, auf die Absicht des Redenden sehen muß, weil nicht die Idee, die zuerst geschrieben oder ausgesprochen, sondern diejenige, die eigentlich zuerst gedacht worden ist, das Subject genennt wird. Z. E. in dem Satze: **ein sehr angenehmer Schriftsteller ist Cicero**, ist das letzte Wort **Cicero** das Subject, und der erste Ausdruck **ein sehr angenehmer Schriftsteller** das Prädicat.

§. 13.

Obgleich bey einem jeden Satze diese drey Theile nothwendig seyn müssen, so pflegt man sie doch nicht

nicht allezeit durch drey verschiedene Worte auszudrücken, indem sehr oft das Prädicat und die Copula, ja bisweilen alle drey Theile in einem einzigen Worte enthalten sind. Z. E. **die Seele denket**, ist ein völliger Satz, denn in dem Worte **denket** steckt sowohl das Prädicat als auch die Copula, und es ist eben so viel, als wenn ich sagte, **die Seele ist dasjenige, welches denket.** Das einzige Wort esurio enthält ebenfalls einen ganzen Satz, wie man schon aus der Uebersetzung, **ich bin hungrig**, sehen kann.

§. 14.

Werden in einem Satze die Begriffe mit einander verbunden, so heißt er **bejahend**; werden sie aber von einander getrennt, so wird er **verneinend** genannt. Z. E. **die Seele ist einfach**, wäre ein bejahender; **die Seele ist nicht sterblich**, ein verneinender Satz. Die Verneinung muß also zur Copula gehören, wenn der Satz verneinend seyn soll; denn sonst, wenn dieselbe zum Subject oder Prädicat gehöret, kann der Satz selbst bejahend seyn, und in diesem Falle wird er auch **infinit** (propositio infinita) genennt. Z. E. **wer seinen Absichten nicht gemäß handelt, ist ein Thor.** Diese Bestimmung eines Satzes, ob er bejahend oder verneinend ist, nennt man seine **Qualität.**

§. 15.

In einem bejahenden Satze wird entweder das Prädicat von allen Dingen, die durch das Subject angezeigt werden, oder nur von einigen behauptet; und eben so wird in den verneinenden Sätzen das Prädicat entweder allen Dingen, die das Subject anzeiget,

get, oder nur einigen abgesprochen. Diejenigen, in welchen von allen etwas bejaht oder verneint wird, heissen allgemeine (propositiones universales,) diejenigen aber, wo nur von einigen die Rede ist, besondere Sätze (propositiones particulares). In jene Classe gehören also folgende beyde: **Alle Schmeichler sind niederträchtig; Kein Verläumder ist ein rechtschaffener Mann**; zu dieser aber hingegen: **Einige Metalle lassen sich leicht zu Aschye verbrennen; Einige Lehrer der Tugend sind nicht tugendhaft.** Diese Beschaffenheit der Sätze, vermöge welcher sie allgemeine oder besondere genannt werden, heißt man ihre Quantität.

§. 16.

Man pflegt die bejahenden Sätze durch die ersten beyden Vocalen des Wortes affirmo, und die verneinenden mit den beyden Vocalen des Wortes nego anzudeuten, nemlich A bedeutet einen allgemein bejahenden; J einen besonders bejahenden; E einen allgemein verneinenden; O einen besonders verneinenden Satz. Diese Sache ist vornemlich deswegen zu merken, weil man sich dieser Bezeichnung der Sätze, wie wir unten sehen werden, bey den Schlüssen bedient.

§. 17.

Wenn das Subject ein Individuum anzeigt, so nennt man solche Sätze **Individual-Sätze** (propositiones singulares) unter welche Art folgender gehört, **Neuton ist ein grosser Geist.** Weil aber das Prädicat hier ebenfalls, wie bey den allgemeinen Sätzen ohne Einschränkung von dem Subjecte

gesagt

gesagt wird, so werden sie bey den Schlüssen den allgemeinen Sätzen gleich geachtet, und ebenfalls durch die Buchstaben A und E bezeichnet.

§. 18.

Zwey Sätze heissen **contradictorisch** oder **widersprechend**, wenn der eine davon den andern für falsch erklärt; z. E. **Die Welt ist ewig. Die Welt ist nicht ewig.** Von solchen Sätzen kann also nur einer wahr und auch nur einer falsch seyn. **Widrig** aber oder **contrair** werden alle diejenigen Sätze genannt, die eine verschiedene Aussage von einerley Sache enthalten, und die alle beyde falsch, aber nicht alle beyde wahr seyn können. Z. E. **Cajus ist ein Soldat; Cajus ist ein Kaufmann;** oder **Alle Menschen sind tugendhaft; Kein Mensch ist tugendhaft.**

§. 19.

Wenn man zwey Sätze mit einander verbindet, wovon der eine die Bedingung enthält, unter welcher der andre für wahr gehalten wird, so heißt der zusammengesetzte Satz ein **bedingter** oder **hypothetischer** Satz. Derjenige Theil, der die Bedingung enthält, wird das **Antecedens** und der übrige Theil das **Consequens** genannt. **Z. E. Wenn die Astrologie eine betrügerische Kunst ist, so muß man nicht die Zeit mit Erlernung derselben verderben.**

§. 20.

Befinden sich in einem Satze zwey oder mehr Prädicate, und wird darinnen gesagt, daß nur eins davon mit Ausschliessung der übrigen dem Subjecte bey-

beygelegt werden könne, so nennt man ihn **theilend** oder **disjunctivisch**, dergleichen sind folgende beyde: **Die Welt ist entweder endlich oder unendlich; die Tugend wird entweder in diesem oder in einem andern Leben, oder gar nicht belohnt.**

§. 21.

In den mathematischen Schriften sind noch verschiedene andre Namen von Sätzen gewöhnlich, die auch bisweilen in andern Abhandlungen vorkommen, und daher angeführt zu werden verdienen. Man theilt zuerst die Sätze überhaupt in **theoretische** und **practische** ein. In den theoretischen wird blos geurtheilt, wie eine Sache beschaffen sey, in den practischen aber wird gesagt, daß man etwas thun könne oder solle. Ist ein Satz seiner Natur nach so deutlich, daß ein jeder von seiner Wahrheit überzeugt wird, sobald er nur die Worte versteht, so heißt er ein **Grundsatz**, und zwar ein **Axioma**, wenn er **theoretisch** ist, ein **Postulatum** oder **Forderungssatz**, wenn er etwas **practisches** enthält. z. E. **Ein Theil ist kleiner als das Ganze** ist ein Axioma; hingegen, **eine jede Linie kann verlängert werden** ein Postulatum. Ist aber ein Satz von der Art, daß man seine Wahrheit nicht eher erkennen kan, als bis er mit andern Sätzen verglichen, d. i. bewiesen worden ist, so heißt er ein **Lehrsatz** oder **Theorema**, wenn er unter die theoretischen gehört, und eine **Aufgab** oder **Problema**, wenn er practisch ist. Der Satz also: **Die Seele des Menschen ist unsterblich** wäre ein Theorem, hingegen der Satz, **die lasterhaften Neigungen des Menschen zu verbessern**, eine Aufgabe. Die

Lehr-

Lehrsätze erhalten unter verschiedenen Umständen noch andre Namen; so heißt z. E. ein Lehrsatz, der aus einem andern ohne weitläuftigen Beweiß hergeleitet werden kann, ein **Corollarium** oder **Folgerung**, und ein solcher, den man aus einer andern Wissenschaft zu seiner gegenwärtigen Absicht entlehnt hat, ein **Lemma** oder **Lehnsatz**. Diejenigen Sätze, die eigentlich nichts wesentliches enthalten, sondern nur der Erläuterung wegen hinzu gesetzt werden, heißt man **Scholia** oder **Anmerkungen**.

§. 22.

Ein Satz, in welchem das Subject mit dem Prädicat einerley ist, heißt ein **identischer Satz**. Es ist aber hier von der Einerleyheit der Begriffe, und nicht der Wörter, die Rede. Es gehört also ein Satz nicht unter die identischen, wenn gleich das Subject und Prädicat aus einerley Worte bestehet, wofern es nicht beydemal in einerley Verstande genommen wird; z. E. folgender Satz ist nicht identisch: **Dreßden ist doch Dreßden**, weil das Wort Dreßden im Subject die bekannte Stadt, im Prädicat aber die Artigkeit bedeutet, die man darinnen antrift. Hingegen, **Ovidius ist derjenige lateinische Poet, der auch den Namen Naso führet**, ist ein wahrer identischer Satz, weil Subject und Prädicat einerley Sache ausdrücken, obgleich die Wörter nicht einerley sind. Diejenigen identischen Sätze, in welchen das Prädicat diejenigen Ideen enthält, die zusammen genommen das Subject ausmachen, und die also hinlänglich sind, dasselbe von allen andern Dingen zu unterscheiden, nennt man **Erklärungen** oder **Definitionen**, von denen jetzt besonders gehandelt werden soll.

Viertes Capitel.

Von den Definitionen.

§. 23.

Einige rechnen die Lehre von den Definitionen zu dem Theile der Logik, der von den Begriffen handelt, alsdenn aber verstehen sie durch dieses Wort nur das Prädicat eines solchen Satzes, in welchem der Begriff des Subjects aufgeklärt wird. In dieser letztern Bedeutung wird eine Erklärung auch definitio applicata, und in der erstern definitio applicans genannt; das Subject in einem solchen Erklärungs-Satze, oder die Sache, die erklärt wird, nennt man das Definitum. Z. E. die **Markscheidekunst ist diejenige Wissenschaft, welche solche Grössen messen lehrt, die bey dem Bergbaue vorzukommen pflegen**; dieser ganze Satz ist die Definitio applicans, das Prädicat, **eine Wissenschaft, welche solche Grössen messen lehrt, die bey dem Bergbaue vorzukommen pflegen**, die Definitio applicata, und das Subject **die Markscheidekunst** das Definitum.

§. 24.

Wenn man also eine Definition von einer Sache machen will, so sucht man zuerst einen Begriff, der diejenige Classe von Dingen anzeigt, unter welche das Definitum gehört, welcher auch daher das **Genus** genannt wird; Hierzu setzt man alsdenn einen oder mehrere Begriffe, welche die Merkmale enthalten, die zureichend sind, das Definitum von allen andern Dingen zu unterscheiden, und diese Merkmale zusammen genommen heissen die **differentia specifica**.

In

In dem vorigen Beyspiele zeigt das Wort **Wissenschaft** das Genus, und die folgenden Worte die differentiam specificam an. Man pflegt bisweilen das Genus in einer Definition wegzulassen, wenn es sich nemlich von selbst versteht, oder wenn sich die eigentliche Classe von Dingen noch nicht angeben läßt, in welchem Falle man sich mit dem ganz allgemeinen Begriffe **Ding** oder **Etwas** behilft. Ohne Noth aber muß man kein so entferntes Genus in einer Definition gebrauchen, sondern, so viel als möglich, das nächste auszuforschen suchen, weil sonst die Deutlichkeit, welche durch die Erklärungen befördert werden soll, dabey leidet.

§. 25.

Man theilet die Erklärungen in **Nominal-Definitionen** oder **Worterklärungen**, und **Real-Definitionen** oder **Sacherklärungen** ein; diese Namen aber haben nicht bey allen Philosophen einerley Bedeutung. Die Mathematiker, nach denen sich auch viele andre Schriftsteller richten, nennen nur diejenigen Erklärungen **Real-Definitionen**, woraus sich sehen läßt, wie die Sache möglich sey, oder entstehen könne; alle andre aber, aus denen man die Möglichkeit oder Entstehungsart der Sache nicht sehen kann, **Worterklärungen**. Wenn ich also sage, **eine Linie entsteht, indem sich ein Punkt von einem Orte gegen einen andern bewegt**, so ist dieses eine Sacherklärung; wenn ich aber sage, **eine Linie ist eine Länge ohne Breite und Dicke**, so ist dieses nach der Sprache der Mathematiker nur eine Worterklärung. Andre hingegen verstehen durch Worterklärungen diejenigen, wo man nur die Absicht hat, die Bedeutung eines Wortes zu bestim-

men, und durch Sacherklärungen solche, wo der Begriff selbst aufgeklärt werden soll. Diejenigen Sacherklärungen, aus denen man zugleich die Möglichkeit oder Entstehungsart begreifen kann, werden von ihnen **generische Definitionen** genannt.

§. 26.

Nachdem wir also wissen, was eigentlich eine Definition ist, und wie man dieselben einzutheilen pfleget, so wollen wir uns nunmehr um die vornehmsten Regeln bekümmern, die bey Abfassung und Beurtheilung derselben zu merken sind. Sie werden sehr leicht zu finden und zu begreifen seyn, wenn wir nur die Absicht und die wesentlichen Theile einer Erklärung in Erwägung ziehen. Die Absicht, welche wir durch die Erklärungen zu erhalten suchen, ist keine andere, als die Deutlichkeit unsrer Erkenntniß, und die Vermeidung des Mißverständnisses, wenn wir andern unsre Gedanken mittheilen wollen. Hieraus ist also folgendes klar:

1. Zu einer ordentlichen Definition muß man nur solche Wörter gebrauchen, die jedem verständlich sind, oder die man schon vorher erklärt hat. Figürliche Redensarten und Ausdrücke müssen also ganz vermieden werden, wofern sie nicht etwa der Mangel andrer Ausdrücke nothwendig macht, weil sonst Erklärungen entstehen, die noch dunkler sind, als die Sätze, die man erklären soll. Z. E. was würde folgende Erklärung nützen? **Der Verstand ist nichts anders als eine Sonne, durch welche die Seele erleuchtet wird.**
2. Man muß nicht blos übersetzen, oder einen Begriff durch gleichgültige Wörter erklären, weil dieses nicht Merkmale angeben heißt, wodurch man die Sache von allen andern unterscheiden könne. Folgende Erklärung würde man also verwerfen müssen, **die Algebra ist nichts anders, als die Analysis der Mathematiker,**

ker, denn das Arabische Wort Algebra bedeutet eben so viel, als das griechische Wort Analysis, nemlich eine Auflösung.

3. Eine gute Definition muß nicht zu weitläuftig seyn, damit man sie leicht fassen könne, aber auch nicht zu kurz, damit sie nicht dunkel werde.

4. Die Merkmale, die in einer Definition angegeben werden, müssen der Sache beständig zukommen, und wesentlich seyn, weil die zufälligen Eigenschaften nicht hinlänglich sind, das Definitum jederzeit von allen übrigen Dingen zu unterscheiden. Daher würde folgende Erklärung nicht gelten können, **die Logik ist diejenige Wissenschaft, welche den ersten Theil der Philosophie ausmacht**, weil die Ordnung der Theile bey den philosophischen Wissenschaften nichts wesentliches ist, deswegen auch von vielen Schriftstellern mit der Metaphysik der Anfang gemacht wird.

5. Eine Erklärung muß nicht auf mehr Dinge passen, als der Name der erklärten Sache, oder, wie man sonst zu sagen pflegt, sie muß nicht weiter seyn, als das Definitum, (ne sit latior definito) sonst würde dadurch leicht eine Verwirrung entstehen. Man kann es also für keine gute Definition der Philosophie halten, wenn gesagt wird, **sie sey eine Wissenschaft der Glückseeligkeit**, denn dieses gilt auch von der Theologie, und von allen nützlichen Wissenschaften.

6. Eine Erklärung muß auch nicht weniger Dingen zukommen, als der Name der erklärten Sache, oder nach der Sprache der Logiker zu reden, sie muß nicht enger seyn als das Definitum, (ne sit angustior definito). Wollte man daher einen **Pedanten** durch **einen Schulmann** definiren, **der nicht zu leben weiß, und Kleinigkeiten aus seiner Wissenschaft einen allzu grossen Werth zuschreibt**, so würde man eine zu enge, und folglich unrichtige Erklärung gemacht haben, weil es auch Professores, Advocaten und Hofleute giebt, denen man den Namen Pedanten beylegt.

7. Man muß im erklären keinen Cirkel oder Wiederkehr machen, das heißt, man muß von einer Reihe Begrif-

se nicht die ersten durch die folgenden, und die folgenden wieder durch die ersten erklären, weil durch dergleichen Definitionen die Dunkelheit nicht gehoben würde. Was für Nutzen hätten wohl folgende Erklärungen? **Ein Rubel ist eine Rußische Silbermünze, die 10 Grieven gilt; ein Grieve eine Münze, die 10 Copeken beträgt, und ein Copeken eine kleine Münze, welche den 100ten Theil eines Rubels ausmacht.**

§. 27.

Die jetzt angeführten Regeln gelten von den Definitionen überhaupt. Von den genetischen Erklärungen aber ist noch insbesondere folgendes zu merken: In einer genetischen Erklärung müssen nicht nur die Dinge angegeben werden, die zur Möglichkeit oder Entstehung einer Sache nothwendig sind, sondern man muß zugleich anzeigen, wie viel jedes davon zu der Sache selbst beytrage. Folgende genetische Erklärung von dem Schießpulver, **daß es eine Masse sey, die aus zerriebenen Salpeter, Schwefel und Kohlen bestehe**, würde also wider diese Regel verstossen, weil darinnen nicht bemerkt ist, wie viel von jeder Materie genommen werden soll, indem nicht durch jedes Verhältniß dieser drey Dinge Schießpulver entsteht. Es müßte also, wenn sie richtig seyn sollte, nothwendig hinzugesetzt werden, daß man vom Salpeter 32, von den Kohlen 6, und von dem Schwefel nur 4 Theile zu nehmen habe.

§. 28.

Weil es unmöglich ist, von allen Dingen vollkommne Erklärungen zu geben, so behilft man sich bisweilen mit der Anführung einer Menge zufälliger Eigenschaften, um dadurch andere wenigstens in den Stand zu setzen, eine Sache zu gewissen Zeiten und bey

bey gewissen Umständen von andern Dingen zu unterscheiden. Dergleichen unvollkommne Erklärungen pflegt man **Beschreibungen** oder **Descriptionen** zu nennen, von dieser Art sind die sogenannten Steckbriefe, in denen man entlaufene Personen kenntbar zu machen sucht.

Fünftes Capitel.

Von den Eintheilungen.

§. 29.

Ein Satz, in welchem das Prädicat alle Species von dem Subjecte enthält, pflegt man eine **logische Eintheilung** oder **Division** zu nennen. Das Beywort logisch wird deswegen hinzu gesetzt, weil das Wort Eintheilung noch eine andere Bedeutung hat, und auch eine Zergliederung des Ganzen in seine Theile anzeigt, die man im lateinischen **partitio** nennt, von welcher aber jetzt nicht die Rede ist. Die Eintheilung des Menschen also in Leib und Seele ist eine Partition, weil Leib und Seele nicht Species, sondern Theile des Menschen sind. Die Eintheilung der Menschen aber in Mannspersonen und Frauenzimmer ist eine Division, weil die Mannspersonen und Frauenzimmer die Species der Menschen ausmachen.

§. 30.

Die Hauptidee, von welcher man eine Division macht, wird das **Totum divisum**, und die Begriffe, welche die Species derselben anzeigen, die **Theilungsglieder** (**membra dividentia**) genannt. Der Umstand, in Ansehung dessen man die Eintheilung macht, der aber nicht allezeit besonders ausge-

drückt wird, heißt das fundamentum divisionis. Z. E. Die Triangel sind entweder rechtwinklicht, oder stumpfwinklicht, oder spitzwinklicht. Hier ist Triangel das Totum divisum; rechtwinklicht, stumpfwinklicht und spitzwinklicht die membra dividentia; die Beschaffenheit der Winkel aber das Fundamentum divisionis. Man wird vielleicht auch ohne mein Erinnern schon einsehen, daß die Eintheilungen der Grund von den disjunctivischen Sätzen sind, die §. 20. erklärt wurden.

§. 31.

Wenn man ein Theilungsglied aufs neue wieder eintheilt, so nennt man eine solche neue Eintheilung eine **Subdivision**. Z. E. Wenn ich sage, die Soldaten sind entweder Officiere oder gemeine Soldaten, und die Officiere sind entweder Ober- oder Unter-Officiere, so ist diese letzte Eintheilung der Officiere in Ansehung der ersten ein Subdivision. Wird aber einerley Sache in Ansehung verschiedener Umstände auf mehr als einerley Art eingetheilt, so heissen diese verschiedene Eintheilungen **Condivisiones**. Z. E. Die Häuser in einer Stadt sind entweder öffentliche oder privat Gebäude, ferner entweder von Stein oder von Holz; woraus man also sehen kan, daß bey Condivisionen ein einziges Totum divisum, aber verschiedene fundamenta divisionis statt haben. In dem vorigen Beyspiele ist bey der ersten Eintheilung die Absicht, und bey der andern die Materie der Häuser das fundamentum divisionis.

§. 32.

§. 32.

Aus dem angeführten Begriff einer logiſchen Eintheilung werden ſich nunmehr die vornehmſten Eigenſchaften derſelben leicht herleiten laſſen. Es muß alſo

1) Einem jeden Theilungsgliede die Definition und nicht blos der Name der eingetheilten Idee zukommen, denn ſonſt könnten die Theilungsglieder nicht Species von dieſer Idee ſeyn. Es iſt dieſes daher für keine eigentliche Diviſion zu halten, wenn einige die Tugend in die **wahre** und in die **Scheintugend** eintheilen, weil die Definition der Tugend denjenigen Handlungen, die man Scheintugenden zu nennen pflegt, nicht zukömmt.

2) Man muß kein Theilungsglied auſſen laſſen, wenn die Eintheilung vollſtändig und nützlich ſeyn ſoll. Wenn man alſo die Handlungen der Menſchen in ſolche, die Belohnungen, und in ſolche, die Strafe verdienen, eintheilen wollte, ſo würde dieſe Eintheilung nicht alle Arten derſelben enthalten, indem es Handlungen giebt, die man weder einer Belohnung, noch einer Strafe werth achten kann.

3) Die Theilungsglieder müſſen nicht in einander enthalten, ſondern verſchieden ſeyn; z. E. man muß die Menſchen nicht eintheilen in **reiche, vornehme, arme** und **geringe**; denn ein Theil der Vornehmen iſt unter den Reichen, ein Theil unter den Armen, und wiederum ein Theil der Reichen unter den Geringen u. ſ. f. enthalten.

4) Das fundamentum diviſionis muß ein wichtiger Umſtand ſeyn, damit man nicht eine Menge unnütze Eintheilungen erhalte, die unſre Kenntniß ohne Noth weitläuftig machen würden. Was für einen Nutzen hätten wohl z. E. dieſe Diviſionen, wenn man die Gelehrten in Anſehung ihrer Geſichtsfarbe, oder in Anſehung ihrer Augen, oder in Anſehung ihrer Haare eintheilen wollte?

Sechstes Capitel.

Von den Schlüssen.

§. 33.

Wenn wir Sätze mit einander vergleichen, und die Wahrheit des einen aus der Wahrheit eines oder einiger andern erkennen, so machen wir einen **Schluß.** Z. E. wenn wir einsehen, daß der Satz, **der Diamant ist der Zerstörung unterworfen**, aus den beyden Sätzen, **jeder Körper ist der Zerstörung unterworfen**, und **der Diamant ist ein Körper**, sich herleiten lasse, so sagen wir, daß wir den ersten aus den andern beyden schliessen. Der Satz selbst, den man aus andern herleitet, heißt der **Schlußsatz** oder **die Conclusion**, die übrigen aber, aus denen er folget, die **Prämissen**, weil man sie gemeiniglich zuerst zu setzen pflegt. Das Prädicat der Conclusion wird der **terminus maior**, und das Subject der **terminus minor** genannt, weil in den meisten Fällen das Prädicat allgemeiner ist, und also mehr Dingen beygelegt werden kann, als das Subject. So wird man in dem vorigen Beyspiele finden, daß der Begriff, **der Zerstörung unterworfen**, welcher das Prädicat des Schlußsatzes ist, und also der **terminus maior**, von mehr Dingen gesagt werden kann, als der Begriff **Diamant**, welcher das Subject und folglich der **terminus minor** ist.

§. 34.

In den Prämissen eines Schlusses geschieht eigentlich nichts weiter, als daß man das Subject und Prädicat der Conclusion mit einem gewissen dritten

Begrif-

Begriffe vergleicht, um dadurch zu erkennen, ob sich die beyden Begriffe der Conclusion mit einander verbinden lassen, oder nicht. Dieser dritte Begriff wird daher auch der **Mittelbegriff**, oder **terminus medius** genannt. Daß der Begriff, **der Zerstörung unterworffen**, dem Begriffe **Diamant** zukömmt, erkenne ich aus der Vergleichung dieser beyden Begriffe mit dem Begriffe **Körper**, welcher also in den vorigen Schlusse der **terminus medius** ist. Derjenige Satz von den Prämissen, in welchem der **terminus maior** und der **terminus medius** mit einander verglichen wird, heißt daher **propositio maior**, der **Obersatz**, und der andere, worinnen die Vergleichung des **termini minoris** mit dem **termino medio** vorkömmt, **propositio minor**, der **Untersatz**. **Jeder Körper ist der Zerstörung unterworffen**, ist also der Obersatz, und, **der Diamant ist ein Körper**, der Untersatz.

§. 35.

Wenn alle Sätze, die man bey einem Schlusse denkt, wie in dem vorigen Beyspiele, ausgedrückt werden, so heißt der Schluß eine **förmliche Schlußrede** oder ein **ordentlicher Syllogismus**. Wird aber einer von den nöthigen Sätzen ausgelassen, so nennt man einen solchen Schluß ein **Enthymema**. **Z. E. die grösten Heiligen sind Menschen, also haben sie ihre Schwachheiten und Fehler.** Hier mangelt eigentlich der Obersatz, **alle Menschen haben ihre Schwachheiten und Fehler.**

§. 36.

Die Stellung des Mittelbegriffs in Ansehung der übrigen beyden Begriffe nennt man die **Figur**

eines

eines Schlusses. Ist der Mittelbegriff das Subject in dem Obersatze, und das Prädicat in dem Untersatze, so heißt diese Stellung die **erste Figur**; ist er in beyden Prämissen das Prädicat, die **zweyte**; ist er beydesmal das Subject, die **dritte**; und ist er das Prädicat im Obersatze, und das Subject in dem Untersatze, die **vierte Figur**, z. E.

Erste Figur.

Alle **Wissenschaften**, welche den **Verstand** schärfen, sind jedem Studierenden nützlich.
Die Mathematik ist eine **Wissenschaft**, welche den **Verstand** schärfet.
Folglich ist die Mathematik einem jeden Studierenden nützlich.

Zweyte Figur.

Alle wahre Christen sind **freygebig** gegen die **Nothleidenden**.
Ein Geitziger ist nicht **freygebig** gegen die **Nothleidenden**.
Folglich ist ein Geitziger kein wahrer Christ.

Dritte Figur.

Alle **Körper** sind schwer.
Einige **Körper** sind unsichtbar.
Folglich sind einige unsichtbare Dinge schwer.

Vierte Figur.

Einige berühmte Männer sind **lasterhaft**.
Jeder **Lasterhafter** ist verachtungswürdig.
Folglich sind einige verachtungswürdige berühmte Männer.

§. 37.

Man wird aus diesen Beyspielen schon von selbst einsehen, daß die erste Figur die natürlichste Art zu schliessen ist. Wir wollen uns daher in der gegenwärti-

wärtigen Abhandlung bey den übrigen Figuren nicht aufhalten, zumal da die meisten neuern Schriftsteller dieselben zu übergehen pflegen, und da sich auch alle Schlüsse der zweyten, dritten und vierten Figur in die Schlüsse der ersten Figur verwandeln lassen.

§. 38.

Wenn wir die Ursache untersuchen, warum wir einen Satz wegen der Wahrheit gewisser andrer Sätze einräumen, so werden wir finden, daß dieses nicht von dem Inhalte der Sätze, sondern von dem Verhältniß der darinn enthaltenen Ideen herrührt. Die Sätze selbst, woraus ein Schluß besteht, nennt man die **Materie** desselben, und die Art und Weise, wie sie mit einander verbunden werden, seine **Form**. Die Untersuchung der Materie eines Schlusses gehört also in diejenige Wissenschaft, von denen die Sätze selbst Theile sind; die Logik beschäftiget sich blos mit seiner Form, und von dieser soll jetzo das nöthigste gesagt werden.

§. 39.

Alle Schlüsse der ersten Figur gründen sich auf folgende Sätze, von denen niemand einen Beweis verlangen wird, der die darinnen enthaltenen Wörter versteht. Man nennt sie sonst in den Logiken das **dictum de omni**, und das **dictum de nullo**.

Was von einer ganzen Gattung bejaht wird, das muß auch von jeder Art und von jedem einzelnen Dinge, welches unter diese Gattung gehört, bejahet werden.

Was von einer ganzen Gattung verneint wird, das muß auch von jeder Art und von jedem einzelnen Dinge, welches unter diese Gattung gehört, verneint werden.

Welchem

Welchem Dinge die Definition zukömmt, dem muß auch das Definitum zukommen.

Welchem Dinge die Definition nicht zukömmt, dem kann auch das Definitum nicht zukommen.

§. 40.

Aus den jetzt angeführten Grundsätzen und aus dem Begriffe einer ordentlichen Schlußrede werden sich nunmehr diejenigen Regeln leicht herleiten lassen, die dabey zu beobachten sind.

1. In einem Syllogismo finden nicht mehr, als drey Hauptbegriffe oder Termini statt.

Denn in jedem Satze giebt es nur zwey Hauptbegriffe, wenn man die Copula nicht mitrechnet. Da nun ein Syllogismus nicht mehr als drey Sätze hat, und in diesen drey Sätzen jeder Begriff zweymal vorkömmt, weil in dem Obersatze der **terminus maior**, und der **terminus medius**, im Untersatze aber der **terminus minor**, und der **terminus medius**, in der Conclusion aber der **terminus maior** und **minor** mit einander verglichen werden müssen: so ist klar, daß ein Syllogismus nicht mehr und nicht weniger, als drey Hauptbegriffe, enthalten kann. Es ist daher zu der Richtigkeit eines Schlusses noch nicht hinlänglich, daß nur dreyerley Namen der Begriffe darinnen vorkommen, sondern die Wörter müssen auch in allen drey Sätzen genau einerley Bedeutung haben. Folgender Schluß würde also falsch seyn, und vier **terminos** haben, ohngeachtet nur drey Hauptwörter darinnen zu seyn scheinen.

Alles was schwer ist, hat ein Bestreben gegen den Mittelpunct der Erde.
Jeder Anfang ist schwer.
Folglich hat jeder Anfang ein Bestreben nach den Mittelpunct der Erde.

Der

Der Fehler steckt hier in dem Worte schwer, welches im Obersatze eine andre Bedeutung hat, als im Untersatze.

2. Der Obersatz in der ersten Figur muß ein allgemeiner Satz seyn.

Denn wollte man einen besondern Satz dazu gebrauchen, so müßte man schliessen können: **was von etlichen Arten des Subjects gilt, das gilt auch von allen Arten und einzelnen Dingen, die unter das Subject gehören**, welches offenbar ungereimt wäre; welcher Ungeübte würde nicht die Unrichtigkeit der folgenden Schlußrede einsehen?

Viele Soldaten sind liederlich.
Cajus ist ein Soldat.
Folglich ist Cajus liederlich.

3. Der Untersatz in der ersten Figur muß allemal ein bejahender Satz seyn.

Denn der Untersatz in einem solchen Schlusse, wie man aus dem vorhergehenden leicht sehen kann, sagt eigentlich dieses: das Subject der Conclusion ist in dem Subjecte des Obersatzes enthalten, woraus hernach geschlossen wird, daß man von dem Subjecte der Conclusion eben das bejahen oder verneinen müsse, was von dem Subjecte des Obersatzes bejaht oder verneint wird. Wäre nun der Untersatz nicht bejahend, so würde man ja alsdann das Gegentheil sagen, nemlich, das Subject der Conclusion wäre nicht in dem Subjecte des Obersatzes enthalten, und wie könnte man in diesem Falle schliessen, daß man von dem Subjecte der Conclusion eben das behaupten könne, was von dem Subjecte des Obersatzes gesagt wird? Das würde einen solchen Schluß geben, wie der folgende ist:

Alle Fische sind Thiere.
Ein Löwe ist kein Fisch.
Folglich ist ein Löwe kein Thier.

Man verwirre aber nicht verneinende Sätze mit solchen, wo eine Verneinung im Subject oder Prädicat vorkömmt, die man **infinit** zu nennen pflegt, und die dennoch bejahend seyn können, weil in einem eigentlich verneinenden Satze das Zeichen der Verneinung zur Copula gehören muß (§. 14.). Folgender Schluß wäre also nicht unrichtig:

Was nicht aus Theilen zusammen gesetzt ist, das kann durch keine endliche Macht vernichtet werden.
Die Seele des Menschen ist nicht aus Theilen zusammen gesetzt.
Folglich kann die Seele des Menschen durch keine endliche Macht vernichtet werden.

Denn der Untersatz bejahet wirklich etwas, indem er sagt, die Seele des Menschen gehöre unter die Dinge, die nicht aus Theilen zusammen gesetzt sind.

4. Die Conclusion richtet sich in Ansehung der Qualität nach dem Obersatze, und in Ansehung der Quantität nach dem Untersatze. Z. E.

Kein Lasterhafter verdient Hochachtung.
Einige grosse Philosophen sind lasterhaft.
Folglich verdienen einige grosse Philosophen keine Hochachtung.

In diesem Schlusse ist die Conclusion ein besondrer Satz, weil es auch der Untersatz ist, und verneinend, weil der major eine Verneinung enthält.

§. 41.

Weil also die Conclusion durch die Prämissen bestimmt wird, und der Obersatz nur ein allgemein bejahender oder allgemein verneinender; der Untersatz hingegen nur ein allgemein oder particular bejahender

ßender Satz seyn kann, so ist klar, daß es in der ersten Figur in Ansehung der Qualität und Quantität der Sätze nicht mehr als vier Arten oder **modos** giebt, wie man sie sonst zu nennen pflegt. Man zeigt diese **modos** in der Logik durch die Wörter **bArbArA, cElArEnt, dArII, fErIO** an, wo die Vocale diejenige Bedeutung haben, die in dem dritten Capitel von den Sätzen §. 16. schon erklärt worden ist. Nemlich durch das Wort **bArbArA**, wo der Vocal A dreymal vorkömmt, wird ein solcher Schluß angedeutet, in welchem alle drey Sätze allgemein und bejahend sind. Z. E.

Alle Menschen sind der Gefahr zu irren ausgesetzt.
Alle Philosophen sind Menschen.
Folglich sind alle Philosophen der Gefahr zu irren ausgesetzt.

Oder

Alle Planeten erhalten ihr Licht von der Sonne.
Der Saturn ist ein Planet.
Folglich erhält der Saturn sein Licht von der Sonne.

Der Minor und die Conclusion sind zwar in dem letzten Schlusse Individual-Sätze, allein sie werden den allgemeinen gleich geachtet, und daher mit eben denen Buchstaben bezeichnet (§. 17.). Das Wort **cElArEnt** zeigt den **modum** an, wo der Obersatz und die Conclusion allgemein verneinend, der Untersatz aber allgemein bejahend ist. Z. E.

Kein Unzufriedner ist wahrhaftig glücklich.
Alle Geitzige sind unzufrieden;
Folglich ist kein Geitziger wahrhaftig glücklich.

Ein Syllogismus in **dArII** hat einen allgemein bejahenden Obersatz; einen besonders bejahenden Untersatz, und eine besonders bejahende Conclusion. Z. E.

Alle rechtschaffene Männer verdienen Hochachtung.
Einige Juden sind rechtschaffene Männer.
Folglich verdienen einige Juden Hochachtung.

In fErIO ist ein allgemein verneinender Obersatz, ein besonders bejahender Untersatz, und eine besonders verneinende Conclusion. Z. E.

Kein Hochmüthiger ist ein guter Gesellschafter.
Einige Gelehrte sind hochmüthig.
Folglich sind einige Gelehrte keine gute Gesellschafter.

§. 42.

Wenn man Schlüsse der übrigen Figuren in die erste Figur verwandeln will, so darf man nur den Mittelbegriff suchen, welches derjenige ist, der in den Prämissen zweymal vorkömmt. (§. 34.) Macht man nun den gefundenen Mittelbegriff zum Subjecte eines Satzes, und behält man das Prädicat der Conclusion, so hat man den Obersatz. Das Subject der Conclusion und der Mittelbegriff als Prädicat giebt den Untersatz, und so ist die ganze Verwandlung geschehen. Z. E. es sey folgender Schluß gegeben:

Kein Fixstern ist ein dunkler Körper.
Die Venus ist ein dunkler Körper.
Folglich ist die Venus kein Fixstern.

In den Prämissen kommt **dunkler Körper** zweymal vor, dieses ist also der Mittelbegriff, und muß das Subject des Obersatzes werden. Wenn ich nun hierzu das Prädicat der Conclusion **Fixstern** setze, so erhalte ich den Obersatz selbst:

Kein dunkler Körper ist ein Fixstern.

Der Untersatz kann hier bleiben, weil er schon den **terminum minorem**, oder das Subject der Conclusion und den Mittelbegriff in der gehörigen Ordnung enthält. Der ganze Schluß würde nunmehr also klingen, und nothwendig zur ersten Figur gehören:

Kein dunkler Körper ist ein Fixstern.
Die Venus ist ein dunkler Körper.
Folglich ist die Venus kein Fixstern.

§. 43.

Auſſer der jetzt erklärten Gattung von Schlüſſen, welche die allergewöhnlichſte iſt, giebt es noch einige andere, die eine kurze Erklärung verdienen, weil ſie wegen ihrer Deutlichkeit in Unterſuchung und Beurtheilung der Wahrheit ſehr gut zu gebrauchen ſind. Vorzüglich müſſen hier die **hypothetiſchen** und **disjunctiviſchen** Schlüſſe bemerkt werden, welche ihren Namen von den Oberſätzen erhalten. In einem **hypothetiſchen** oder **bedingten** Schluſſe wird aus einem hypothetiſchen Satze entweder von der Wahrheit des **Antecedentis** auf die Wahrheit des **Conſequentis**; oder von der Falſchheit des **Conſequentis** auf die Falſchheit des **Antecedentis** geſchloſſen. Die erſte Art zu ſchlieſſen heißt **modus ponens**; die andere aber **modus tollens**. Z. E.

modus ponens.

Wenn nichts ohne Urſach entſteht, ſo müſſen die zufälligen Dinge einen Schöpfer haben;
Nun iſt das erſte wahr, daß nichts ohne Urſach entſteht.
Folglich auch das letzte, daß nemlich die zufälligen Dinge einen Schöpfer haben müſſen.

modus tollens.

Wenn der Menſch nicht frey iſt, ſo giebt es auch keine eigentliche Tugend, und kein Laſter.
Nun iſt das letzte falſch, daß es keine Tugend und kein Laſter gebe.
Folglich iſt auch das erſte falſch, daß der Menſch nicht frey ſey.

§. 44.

Daß aber auſſer dieſen beyden Arten in hypothetiſchen Schlüſſen keine andre möglich ſey, und daß man nicht von der Falſchheit des **Antecedentis** auf die Falſchheit des **Conſequentis**; oder von der Wahr-

heit des Consequentis auf die Wahrheit des Antecedentis schliessen könne, wird man leicht einsehen, wenn man nur folgendes in Erwägung zieht. Weil das Consequens, wenn der hypothetische Satz richtig ist, nothwendig aus dem Antecedente fließt, so ist klar, daß man das Consequens einräumen muß, so bald man das Antecedens zugiebt, und dieses ist der Grund, warum man von der Wahrheit des Antecedentis auf die Wahrheit des Consequentis schliessen kann. Wenn aber gleich das Antecedens falsch ist, so kann doch das Consequens wahr seyn, weil es möglich ist, daß sich dasselbe aus einem andern Antecedente herleiten läßt. Man kann daher von der Falschheit des Antecedentis keinen Schluß auf die Falschheit des Consequentis machen. Z. E. in dem Satze: **Wenn die Planeten eine Seele haben, so müssen sie sich bewegen,** ist das Antecedens offenbar falsch, und doch ist das Consequens wahr. Ich würde daher sehr irren, wenn ich schliessen wollte: **Nun ist es falsch, daß die Planeten Seelen haben, also ist es auch falsch, daß sie sich bewegen.** Weil also ein wahrer Satz aus einem falschen fliessen kann, so folgt, daß der Schluß von der Wahrheit des Consequentis auf die Wahrheit des Antecedentis nicht gelten könne. Wer würde wohl folgenden Schluß für richtig halten?

Wenn es wahr ist, daß die Seelen der Verstorbenen ihren Verwandten wieder erscheinen, und ihnen Nachricht von der Beschaffenheit der unsichtbaren Welt geben, so müssen sie auch nach der Trennung von ihren Körpern noch leben.

Nun ist das letzte wahr, daß die Seelen nach der Trennung von ihren Körpern noch leben.

Folglich muß das erste auch wahr seyn, daß die Seelen

der

der Verstorbenen ihren Verwandten wieder erscheinen, und ihnen Nachricht von der Beschaffenheit der unsichtbaren Welt geben.

Hingegen da aus einem wahren Satze kein falscher folgen kann, und also jeder Satz, aus welchem ein falscher fließt, selbst unwahr seyn muß, so ist klar, daß man mit Recht von der Falschheit des Consequentis auf die Falschheit des Antecedentis schliessen könne.

§. 45.

Disjunctivische Schlüsse nennt man diejenigen, in welchen der Hauptsatz disjunctivisch ist, und folglich eine Eintheilung enthält. Man schließt alsdenn entweder von der Setzung des einen Glieds auf die Verneinung aller übrigen; oder von der Verneinung des einen auf die Setzung eines der übrigen, oder von der Verneinung aller Glieder ausgenommen eins auf die Setzung dieses letztern. Enthält der disjunctivische Satz nur zwey Glieder, so sind auch nur die beyden Fälle möglich, von der Wahrheit des einen auf die Falschheit des andern, oder von der Falschheit des einen Gliedes auf die Wahrheit des andern zu schliessen. Z. E.

Die Seele des Menschen ist entweder einfach oder zusammengesetzt;
Nun ist es unmöglich, daß sie zusammengesetzt seyn könnte;
Folglich muß sie nothwendig einfach seyn.

Oder

Nun ist sie einfach;
Folglich kann sie nicht zusammengesetzt seyn.

Ferner

Der Mond ist entweder eben so groß, oder noch grösser, oder kleiner, als die Erde.
Nun lehrt die Astronomie, daß er kleiner ist, als die Erde.
Folglich kann er nicht grösser, auch nicht eben so groß seyn, als die Erde.

Oder
Nun ist es falsch, daß er eben so groß sey, wie die Erde.
Folglich muß er entweder grösser oder kleiner seyn.
Oder
Nun ist es falsch, daß er so groß, oder grösser sey, als die Erde;
Folglich muß er kleiner seyn.

Die Hauptsache bey dergleichen Schlüssen kömmt auf die Richtigkeit der Eintheilung in dem Prädicate des disjunctivischen Satzes an; denn wofern ein Theilungsglied aussen gelassen worden ist, so kann leicht ein falscher Schluß entstehen, dergleichen folgender seyn würde:

Das Spatzierengehen verdient entweder eine Belohnung, oder eine Strafe.
Nun kann man nicht sagen, daß es eine Belohnung verdiene;
Folglich verdient das Spatzierengehen eine Strafe.

Der Fehler bey diesem Schlusse besteht blos darinnen, daß ein Theilungsglied in dem ersten Satze mangelt; denn eigentlich sollte er also abgefaßt seyn:

Das Spatzierengehen verdient entweder eine Belohnung, oder eine Strafe, oder keines von beyden.

§. 46.

Wenn das Consequens eines hypothetischen Satzes disjunctivisch ist, und von der Verneinung aller Glieder, d. i. des ganzen Consequentis auf die Verneinung des Antecedentis geschlossen wird, so nennt man einen solchen Schluß ein **Dilemma** oder einen **gehörnten Schluß**. Z. E.

Wenn man behaupten wollte, daß die menschliche Seele sterblich wäre, so müßte man zeigen, daß sie GOtt entweder nicht erhalten wolle, oder nicht erhalten könne.
Nun läßt sich nicht beweisen, daß GOtt die menschliche Seele nicht erhalten wolle, noch viel weniger, daß er sie nicht erhalten könne.

Folglich läßt sich auch nicht behaupten, daß die menschliche Seele sterblich sey.

Man wird leicht einsehen, daß auch hier das vornehmste auf die Vollständigkeit der Eintheilung im Obersatze ankömmt, ohne welche kein solcher Schluß richtig seyn kann.

§. 47.

Wenn man ein Prädicat einer Gattung beylegt, weil es von allen Arten gilt, oder wenn man es einer Art zuschreibt, weil es sich von allen einzelnen Dingen, die unter dieser Art enthalten sind, behaupten läßt, so nennt man einen solchen Schluß eine **Induction**, wobey weiter nichts zu merken ist, als daß man im ersten Falle keine Species derjenigen Gattung, wovon die Rede ist, und im andern Falle kein Individuum, das zu der Art gehöret, aussenlassen muß. Wenn ich also durch eine Induction zeigen wollte, daß die Planeten dunkle Körper wären, so müßte ich zeigen, daß ein jedes Individuum, das man mit diesem Namen belegt, nemlich sowohl der Mercurius, als auch die Venus, der Jupiter u. s. w. kein eignes Licht hätte.

§. 48.

Aus einer Reihe Sätze, in welchen allemal das Prädicat des vorhergehenden zum Subjecte des folgenden Satzes gebraucht wird, entstehen die so genannten **Kettenschlüsse** oder **Sorites**. Z. E.

Wer unmäßig im Essen und Trinken ist, der schwächt seinen Magen;
Wer seinen Magen schwächt, der verderbt seine Gesundheit;
Wer seine Gesundheit verderbt, der macht sich untüchtig zu seinen Berufsarbeiten, und verkürzt sein Leben.

Wer sich untüchtig zu seinen Berufsarbeiten macht, und sein Leben verkürzt, der handelt wider die göttlichen Gesetze.

Folglich wer unmäßig im Essen und Trinken ist, der handelt wider die göttlichen Gesetze.

Wer das vorhergehende verstanden hat, wird von selbst leicht einsehen, wie man aus einem solchen Kettenschlusse einfache Schlüsse der ersten Figur machen könne.

Siebentes Capitel.

Von den Beweisen.

§. 49.

Beweisen ist nichts anders, als den Zusammenhang eines Satzes mit andern wahren Sätzen zeigen. Dieses kann nun bisweilen durch einen einzigen Schluß geschehen; bisweilen aber wird hierzu eine ganze Reihe von Schlüssen erfordert. Ist der Beweiß so beschaffen, daß sich das Gegentheil von dem erwiesenen Satz nicht mehr denken läßt, so wird er **apodiktisch** oder eine **Demonstration** genannt, dergleichen vorzüglich die Beweise in der Mathematik sind.

§. 50.

Beweiset man aus blossen Erklärungen und allgemeinen Begriffen, ohne die Erfahrung zu Hülfe zu nehmen, so beweiset man, nach der Sprache der Logik, **a priori.** Bedient man sich hingegen solcher Sätze, die aus der Erfahrung bekannt sind, so beweiset man **a posteriori.** Z. E. Wenn ich die Weißheit GOttes aus der blossen Erklärung, daß GOtt dasjenige Wesen sey, welches alle mögliche Vollkommenheiten besitzet,

besitzet, herleite, so beweise ich die Weißheit GOttes a priori; zeige ich aber dieselbe aus der vortreflichen Ordnung und Einrichtung des Weltgebäudes, die ich nur durch die Erfahrung erkennen kann, so beweise ich sie a posteriori.

§. 51.

Man pflegt auch die Beweise in directe und indirecte einzutheilen. Directe nennt man diejenigen, in welchen der Satz selbst unmittelbar aus andern wahren Sätzen hergeleitet wird; von dieser Art waren die vorhin angeführten Beyspiele. Indirecte Beweise aber, die man sonst auch demonstrationes apagogicas und deductiones ad absurdum heisset, sind solche, in welchen die Falschheit des Gegentheils von dem zu erweisenden Satze gezeigt wird. Nemlich man nimmt unterdessen das Gegentheil als wahr an, und schließt daraus so lange fort, bis man auf einen Satz kömmt, der offenbar falsch ist. Folgt nun aus dem Gegentheile etwas falsches, so muß auch das Gegentheil selbst falsch, und folglich der zu erweisende Satz nothwendig wahr seyn. Z. E. es sollte der Satz erwiesen werden, **der Raum und GOtt ist nicht einerley**, so könnte dieses indirecte folgendergestalt geschehen. Wir wollen annehmen, es sey der entgegen gesetzte Satz wahr, **der Raum und GOtt ist einerley**; so folgt hieraus, daß man GOtt die Eigenschaften des Raums zuschreiben müsse. Nun ist der Raum ausgedehnt und theilbar; Folglich muß auch GOtt ausgedehnt und theilbar seyn. Da nun diese Folgerung offenbar ungereimt ist, und mit der Natur eines Geistes streitet, so ist auch der Satz ungereimt, aus welchem diese Folgerung fließt, und folglich der entgegen gesetzte wahr, daß der Raum nicht GOtt sey.

§. 52.

Da aus dem vorhergehenden klar ist, daß ein jeder Beweis aus Schlüssen bestehet, die aber gemeiniglich abgekürzt, und als Enthymemata vorgetragen werden, so wird es nicht nöthig seyn, eine Menge Regeln herzusetzen, die bey den Beweisen zu beobachten sind, indem es vorzüglich darauf ankömmt, daß man diejenigen Regeln genau befolget, die in dem vorhergehenden Capitel von den Schlüssen erklärt worden sind. Folgende Erinnerungen werden unterdessen für einen Anfänger nicht überflüßig seyn.

Erstlich, wenn man einen Satz beweisen will, so muß man genau erwägen, was eigentlich der Umstand oder der Punct sey, der erwiesen werden soll, damit man nicht etwas erweise, wovon gar nicht die Rede ist, welcher Fehler sehr häufig im Disputiren und in den öffentlichen Streitschriften bemerkt werden kann. Er wird von den Logikern **die Veränderung der Streitfrage, oder** *ignoratio elenchi* genannt. Z. E. wenn ich die Unsterblichkeit der Seele, nach dem Beyspiele einiger Schriftsteller, daraus beweisen wollte, weil sie einfach ist, und folglich nicht in Theile, wie der Körper, aufgelöst werden kann, so würde ich diesen Fehler begehen. Denn es ist nicht davon die Rede, ob die Seele nach dem Tode noch fortdauert, sondern, ob sie auch alsdenn noch lebet, d. h. ob sie noch denkt, und sich ihrer bewußt ist; denn das will das Wort Unsterblichkeit eigentlich sagen, welche man mit der Unverweslichkeit, die aus der Einfachheit der Seele folgt, nicht verwirren muß.

Ferner muß man zu den Prämissen derjenigen Schlüsse, aus denen man seinen Beweis zusammensetzen will, keine andere Sätze nehmen, als solche, die

die entweder unmittelbar klar, oder vorher schon richtig erwiesen worden sind; weil man sich sonst keine richtige Conclusion versprechen kann. Derjenige Fehler, da man Sätze, die man erst erweisen sollte, als Beweisgründe schon annimmt, wird **petitio principii** genennt, dergleichen würde man begehen, wenn man in einem Streite mit einem Freygeiste, den Satz, daß die Bibel GOttes Wort sey, aus einem biblischen Spruch erweisen wollte. Beweiset man einen Satz aus einem andern, und den andern wieder aus dem ersten, so wird dieses ein **Cirkel in Beweisen** genannt, der also eine Species von dem vorigen Fehler ist. Z. E. wenn man bewiese, daß die Thiere keine Sprache lernen könnten, weil sie keine Vernunft hätten, und hernach in der Folge den Satz, daß sie keine Vernunft hätten, wieder daraus schlösse, weil sie keine Sprache lernen könnten, so würde dieser Beweis ein offenbahrer Cirkel seyn.

Achtes Capitel.

Von der Wahrheit.

§. 53.

Die Hauptabsicht, die wir durch das Studium der Logik zu erhalten suchen, ist die Erkenntniß der Wahrheit, wie fern sie uns in dem unvollkommnen Zustande des gegenwärtigen Lebens möglich ist. Es wird also nichts überflüßiges seyn, wenn wir nunmehr eine kurze Betrachtung über die Natur und über die Kennzeichen der Wahrheit anstellen. Durch das Wort **Wahrheit** versteht man in der Logik nichts anders, als die Uebereinstimmung unsrer Gedanken mit den Dingen selbst, die durch unsre Gedanken

danken abgebildet werden. Der Wahrheit ist der Irrthum entgegen gesetzt, der also in dem Mangel einer solchen Uebereinstimmung unsrer Gedanken mit den gedachten Dingen bestehen muß. In der Moral und Metaphysik hat das Wort Wahrheit noch eine andere Bedeutung. In der Moral zeigt es die Uebereinstimmung unsrer Gedanken mit den gebrauchten Zeichen an, und in der Metaphysik bedeutet es so viel als die Wirklichkeit der Sache selbst, die gedacht werden kann; Daher man auch die Beywörter, logisch, moralisch, und metaphysisch zu gebrauchen pflegt, um den Unterschied dieser Bedeutungen anzuzeigen.

§. 54.

Nicht jedermann räumt ein, daß es wirklich eine Wahrheit in der logikalischen Bedeutung dieses Worts giebt; wir wollen uns aber in keine Untersuchung dieser Meynung einlassen, weil wir sonst nothwendig eine Menge subtile Betrachtungen anstellen müßten, die unsern jungen Lesern aus den bisher erklärten Lehren noch nicht deutlich genug vorgetragen werden könnten, und auch über dieses für den grösten Theil derselben unnöthig seyn würden. Denn ohngeachtet man in der philosophischen Geschichte eine Menge Personen zu nennen pflegt, die an allen Dingen sollen gezweifelt haben, woraus die Nothwendigkeit einer solchen Untersuchung zu fliessen scheint, so ist es doch, wenn man die Nachrichten von diesen Personen genau erwägt, sehr unwahrscheinlich, daß sie im Ernst gezweifelt haben. Denn da sie in allen übrigen Handlungen sich niemals ihren Grundsätzen gemäß bezeiget, so ist es sehr glaublich, daß sie bey ihren Einwürfen wider die Gewißheit aller menschlichen

Erkennt-

Erkenntniß keine andre Absicht gehabt haben mögen, als entweder ihren Scharfsinn sehen zu lassen, oder einige allzuprahlerische Philosophen ein wenig zu demüthigen.

§. 55.

Aber, wird man nunmehr vielleicht fragen, wenn es Wahrheit giebt, an was für einem Merkmale ist sie zu erkennen, und auf was für Art läßt sich die Gefahr vor einem Irrthum vermeiden? Diese Frage verdient allerdings einige Aufmerksamkeit, und soll daher, so weit es die engen Grenzen dieser Bogen verstatten, beantwortet werden. Einige Sätze halten wir deswegen für wahr, weil uns die Natur unsers Verstandes zwingt, die Begriffe auf diese Art zu verbinden, und weil es uns unmöglich fällt, das Gegentheil davon anzunehmen. Aus diesem Grunde räumen wir ohne Widerrede die Sätze ein, daß nichts zugleich seyn, und nicht seyn könne, daß jedes entstandene Ding eine Ursache haben müsse, und daß alles, was wir wirklich empfinden, auch in der That wirklich vorhanden sey. Sollten nun diese Sätze dennoch unwahr seyn, ohngeachtet das Wesen unsers Verstandes dieselben uns als wahr zu denken nöthiget, so müßte GOtt, von dem die Einrichtung unsers Verstandes herrühret, der Urheber von unserm Irrthume seyn, ein Vorwurf, welchen man von dem vollkommensten Wesen unmöglich mit Recht machen könnte. Man pflegt diejenige Deutlichkeit eines Satzes, die hinlänglich ist, die Wahrheit desselben einzusehen, Evidenz zu nennen, und folglich ist klar, daß man die Evidenz für ein sichres Merkmal der Wahrheit zu halten habe. Alle übrigen Sätze, die nicht so unmittelbar deutlich sind,

müssen

müssen mit diesen verglichen werden. Finden wir nun unter ihnen einen nothwendigen Zusammenhang, so haben wir keine Ursache, an ihrer Wahrheit zu zweifeln, daher man auch dergleichen Sätzen eine mittelbare Evidenz zuschreibt. Wir werden also vor dem Irrthum sicher seyn, wenn wir keinen Satz annehmen, der nicht entweder unmittelbar klar ist, oder aus unmittelbar klaren Sätzen durch richtige Schlüsse hergeleitet werden kann. Bey den Sätzen, die wir durch die äusserliche Empfindung erhalten, muß man nur die gehörige Behutsamkeit anwenden, und eine wahre Empfindung nicht mit einer vermeinten vermengen. Man muß daher, ehe man auf seine Empfindung Urtheile gründet, vor allen Dingen untersuchen, ob diejenigen Theile unsers Körpers, durch welche wir empfinden, völlig gesund gewesen, ob der Gegenstand, den wir empfunden, nicht zu weit entfernt, und von was für Beschaffenheit diejenige Materie gewesen sey, die sich zwischen uns und dem Gegenstande befunden. Am besten ist es, wenn man viele Empfindungen mit einander vergleicht, um aus ihrer Uebereinstimmung von der Richtigkeit derselben urtheilen zu können. Auch muß man dasjenige, was man eigentlich empfindet, und dasjenige, was man daraus schließt, wohl unterscheiden, worinnen wir desto leichter zu fehlen pflegen, da wir von Jugend an gewohnt sind, unsre Schlüsse sehr flüchtig zu machen, und uns nicht immer alle Theile derselben genau vorzustellen. Z. E. die Empfindung lehrt nicht, wie der gemeine Mann glaubt, daß sich die Sonne um die Erde bewegt, sondern dieses ist schon ein Schluß, dessen man sich nur nicht allemal genau bewußt ist. Durch die Empfindung wissen wir blos, daß die Abbildung der Sonne in unsern Augen bewegt

wegt wird. Nun kann dieſe Bewegung des Bildes aus zwey Urſachen entſtehen, nemlich entweder durch die Bewegung der Sonne ſelbſt, wenn unſer Auge ruht, oder durch die Bewegung unſers Auges, wenn die Sonne in Ruhe bleibt. Auch der ungeübteſte Leſer wird ſich davon überzeugen können, wenn er nur überlegt, daß man in einem Schiffe oder Wagen eine Bewegung der ruhenden Häuſer und Bäume zu empfinden ſcheint, ſo oft man ſelbſt bewegt wird. Wir müſſen alſo in dieſem Fal. eigentlich folgendergeſtalt urtheilen: Wir empfinden in unſerm Auge eine Bewegung von dem Bilde der Sonne, folglich muß ſich entweder die Sonne bewegen, oder die Erde, auf der wir uns befinden. Welches von beyden nun wirklich geſchehe, läßt ſich aus dieſer einzigen Empfindung nicht ausmachen, ſondern muß aus der Vergleichung mit andern Erfahrungen beſtimmt werden.

§. 56.

Diejenige Beſchaffenheit unſrer Erkenntniß, vermöge welcher man die Wahrheit des Gegentheils nicht befürchten darf, nennt man **Gewißheit**. Iſt das Gegentheil von einem Satze ſo beſchaffen, daß es eine Unmöglichkeit enthält, ſo wird die Gewißheit **geometriſch** genennt; hingegen wenn das Gegentheil, an ſich betrachtet, zwar möglich iſt, wir aber keine vernünftige Urſache haben, es für wahr zu halten, ſo heißt die Gewißheit **moraliſch**. Z. E. Folgende beyde Sätze wird niemand leugnen. **In einem geradelinigten Triangel iſt nur ein einziger rechter Winkel möglich**, und, **im vorigen Jahrhunderte hat in Deutſchland ein berühmter Philoſoph, mit Namen Leibnitz gelebt.** Das Gegentheil von dem erſten Satze iſt ſchlechterdings unmöglich, folglich iſt die Gewißheit, die

die wir davon haben, **geometrisch**; das Gegentheil von dem andern ist zwar möglich, aber wir haben nicht die geringste vernünftige Ursache, es für wahr anzunehmen, daher ist seine Gewißheit **moralisch**.

§. 57.

Sowohl in den Wissenschaften, als auch in dem gemeinen Leben müssen wir uns oft mit solchen Sätzen behelfen, von denen sich keine völlige Gewißheit erlangen läßt. Wir werden aber durch sie niemals zu Irrthümern verleitet werden, wenn wir uns ihrer Ungewißheit nur bewußt bleiben, und sie nicht als Gründe unsrer Schlüsse und Beweise gebrauchen. Einige von dergleichen Sätzen sind so beschaffen, daß wir mehr Merkmale von ihrer Wahrheit, als von ihrer Falschheit haben, daher man sie **wahrscheinlich** zu nennen pflegt. Z. E. Wenn wir den Satz überlegen, es giebt im Monde lebendige Geschöpfe, so werden wir finden, daß wir ihn zwar nicht aus lauter evidenten Grundsätzen und Erfahrungen herleiten können, daß wir aber vielmehr Ursache haben, ihn für wahr zu halten, als sein Gegentheil. Daß es Stuffen oder Grade der Wahrscheinlichkeit giebt, wird ein jeder von selbst einsehen können; die Kürze der gegenwärtigen Abhandlung aber erlaubt es nicht, uns in eine ausführliche Betrachtung dieser sonst nützlichen Materie einzulassen.

Neuntes Capitel.

Von der Lehrart.

§. 58.

Die Ordnung, welcher man sich bey dem Vortrage seiner Gedanken bedient, heißt die **Lehrart** oder

oder **Methode**, welche man in die **synthetiſche**, **analytiſche** und **vermiſchte** einzutheilen pflegt. Bey der **ſynthetiſchen**, d. i. wenn man das griechiſche Wort verdeutſchen wollte, **zuſammenſetzenden** Lehrart, fängt man von den Erklärungen und Grundſätzen an, und ſchließt aus dieſen ſo lange fort, bis man endlich auf diejenigen Sätze ſelbſt kömmt, die man eigentlich beweiſen will. Bey der **analytiſchen**, d. h. **auflöſenden** Lehrart bedient man ſich der entgegen geſetzten Ordnung, nemlich man fängt von dem zu erweiſenden Satze ſelbſt an, und geht zurück bis auf die Grundſätze und Erklärungen, aus denen er ſich herleiten läßt. Die **vermiſchte** Methode, welche meiſtentheils in weitläuftigen Werken gebraucht wird, beſteht aus der Verbindung der vorigen beyden Lehrarten, die man nach Beſchaffenheit der Materie und der Umſtände zu wählen pflegt.

§. 59.

In den neuern Zeiten iſt auch der Name der **mathematiſchen Lehrart** ſehr bekannt geworden, die man vorzüglich deswegen ſo bewunderte, weil man fand, daß in den Schriften der Mathematiker eine Gewißheit herrſchte, dergleichen man in einer ſolchen Vollkommenheit nirgends antraf, welches einige blos der Methode zuſchrieben. Dieſe mathematiſche Lehrart aber iſt eigentlich keine andre, als die ſynthetiſche, welche ſich zu dem Vortrage ſchon erfundner Wahrheiten am beſten ſchickt, und ſich auch bey andern Wiſſenſchaften genau beobachten läßt, ob man gleich durch ihre Hülfe allein die geometriſche Gewißheit nicht erhalten kann, als welche vorzüglich von der Evidenz der Grundſätze und Erklärungen abhängt. Die Meßkünſtler ſind von langer Zeit her gewohnt

gewesen, die Gesetze dieser synthetischen Methode weit genauer zu befolgen, als die andern Philosophen, und dieses ist der Grund, warum man sie nicht die philosophische, wie sie eigentlich heissen sollte, sondern die **mathematische** Lehrart genannt hat. Nemlich die Meßkünstler fangen jederzeit mit Erklärungen an, und reden niemals von einer Sache, wovon sie noch keinen deutlichen Begriff gegeben haben, als welches das einzige Mittel ist, die Zweydeutigkeit und die Verwirrung zu vermeiden. Nach den Erklärungen folgen die Grundsätze und Forderungen, die keines Beweises bedürfen. Hierauf gehn sie zu denjenigen Sätzen fort, die bewiesen werden müssen, und beobachten jederzeit diese Regel auf das genaueste, daß sie keinen Satz vortragen, der nicht entweder unmittelbar evident ist, oder sich aus den vorhergehenden Sätzen richtig erweisen läßt. Daß viele Schriftsteller den Anfängern zu gefallen, die Namen der Sätze zugleich beyfügen, und das Ende eines Beweises, durch die Worte, **welches zu erweisen war**, anzeigen, ist etwas zufälliges, wie ein jeder leicht einsehen wird, dessen Nachahmung einer Schrift nicht die geringste Gründlichkeit verschaffen kann.

Die

Die mathematischen Wissenschaften.

Vorbericht.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

§. 1.

Durch die **Mathematik** versteht man diejenige Wissenschaft, welche sich mit Betrachtung der Grössen beschäftiget, und aus einigen Bekannten andre Unbekannte finden lehrt. Die **Grösse** aber ist diejenige Eigenschaft der Dinge, vermöge welcher sie sich vermehren oder vermindern lassen. Das Wort **Mathematik** ist, wie bekannt, griechischen Ursprungs, und drückt eigentlich dasjenige nicht aus, was man jetzt dabey denket, indem es nichts als eine **Wissenschaft** oder **Unterweisung** bedeutet. Die Ursache, warum man der Wissenschaft von den Grössen diesen Namen gegeben habe, ist bey den Schriftstellern noch eine sehr zweifelhafte Sache. Einige glauben, daß man sie wegen der Gewißheit, die man in einem so hohen Grade in keiner andern Wissenschaft antrift, im vorzüglichen Verstande mit dem Namen Wissenschaft belegt habe. Andre vermuthen, es sey deswegen geschehen, weil man bey den alten

griechischen Philosophen mit der Mathematik den Anfang im Studieren gemacht, und neben derselben fast keine eigentliche Wissenschaft weiter getrieben habe, so, daß also damals bey einem jungen Schüler Mathematik und Wissenschaft überhaupt einerley gewesen sey.

§. 2.

Die Grösse einer Sache erkennt man entweder unmittelbar durch die Vorstellung unsrer Sinne, oder durch die Vergleichung mit einer andern schon bekannten Grösse. Z. E. von der Grösse eines Zolls oder einer Elle erlange ich unmittelbar einen Begriff, wenn mir ein Zoll oder eine Elle gezeigt wird. Die Entfernung aber einer Stadt von einer andern erkennen wir blos dadurch, daß wir sie mit einer andern bekannten Grösse von eben der Art vergleichen, und sehen, wie oft diese in jener enthalten sey. Diese Beschäftigung, da man eine unbekannte Grösse durch eine bekannte bestimmt, heißt in der Mathematik überhaupt **messen**, ob man gleich im gemeinen Leben dieses Wort nur in einigen Fällen zu gebrauchen pflegt. Denn so nennt man es zwar messen, wenn man die Höhe eines Hauses durch die Länge einer Elle, oder die Entfernung einer Stadt durch die Länge einer Meile u. s. f. bestimmt; aber eine Summe Geld durch eine Grösse von eben der Art, nemlich durch eine bekannte Münze ausdrücken, welches auch eine Art von messen ist, nennt man **zählen**; eine noch unbekannte Schwere durch eine bekannte ausmessen, nennt man **wägen** u. s. w. Die bekannte Grösse, deren man sich bedient, um eine unbekannte dadurch zu bestimmen, wird das **Maaß** genannt, und muß allemal, wie

man

man schon aus den vorigen Erklärungen einsehen wird, von eben der Art seyn, von welcher die zu messende Sache ist.

§. 3.

Es ist nicht jederzeit möglich, daß man bey dem Messen diejenige Grösse, die man zum Maasse angenommen hat, an die auszumessende unbekannte Grösse bringen kann, sondern oft muß diese Vergleichung der bekannten und unbekannten Grösse durch blosse Schlüsse geschehen, ohne daß sich beyde unmittelbar zusammenbringen lassen, wie z. E. bey der Messung der Höhe eines Thurms, oder der Weite eines Sterns von der Erde; und hierinnen besteht vorzüglich das Geschäfte der Mathematik, indem eine unmittelbare Messung eben keine besondre Unterweisung und grosse Geschicklichkeit erfordert. Man kann daher sagen, wenn man eine ausführliche Erklärung von der Mathematik geben will, die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, welche die Natur und Eigenschaften der Grössen erklärt, und die Mittel zeigt, wie man aus einigen bekannten Grössen andre noch unbekannte durch Schlüsse entdecken könne.

§. 4.

Um von den Grössen reden zu können, und das Gedächtniß der Lernenden nicht mit einer Menge fremder Namen beschweren zu dürfen, haben die Mathematiker die Buchstaben des Alphabets zu Zeichen derselben gewählt. Ein a oder b oder c zeigt also überhaupt eine jede Grösse an, doch so, daß bey einer Aufgabe oder Lehrsatze ein Buchstabe nur einerley Sache bedeutet, weil sonst nothwendig eine Verwirrung entstehen würde.

§. 5.

Man pflegt die Mathematik in die **reine** und **angewandte** einzutheilen. **Rein** nennet man die Mathematik, wenn sie sich blos mit Betrachtung der Grössen überhaupt beschäftiget; **angewandt** hingegen, wenn sie die Grössen der wirklichen Dinge in der Natur untersuchet. So gehöret z. E. die Lehre von den Eigenschaften einer Kugel überhaupt in die reine, die Betrachtung der Sonne aber, als eines kugelförmigen Körpers, in die angewandte Mathematik.

§. 6.

Sowohl die reine als auch die angewandte Mathematik pflegt man wiederum in verschiedene Theile zu zergliedern, die auch wegen ihres ansehnlichen Umfangs als besondere Wissenschaften angesehen werden. Die reine Mathematik bestehet aus den **arithmetischen** und **geometrischen** Wissenschaften, weil es zweyerley Arten von Grössen giebt, **stetige** und **unstetige**. **Stetige Grössen** (quantitates continuae) sind solche, deren Theile in einer Verbindung mit einander stehen, und ein zusammenhängendes Ding ausmachen; **unstetige** aber (quantitates discretae) heissen diejenigen, in welchen man blos eine Menge von Dingen als ein Ganzes betrachtet, ohne darauf zu sehen, ob sie sich in einer Verbindung unter einander befinden, oder nicht. So ist z. E. eine Linie oder eine Fläche eine stetige; acht Sterne, oder sieben Personen aber eine unstetige Grösse. Von den stetigen Grössen handeln die **geometrischen**, von den unstetigen hingegen die **arithmetischen Wissenschaften**. In den meisten

Lehr-

Lehrbüchern pflegt man hieraus vier besondere Wissenschaften zu machen, nemlich die **Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie** und **Algebra.** Die **Trigonometrie** beschäftiget sich eigentlich mit einem geometrischen Gegenstande, nemlich mit den **Triangeln**, betrachtet aber die Theile derselben als unstetige **Grössen**, und lehret aus einigen gegebenen Stücken die übrigen durch Rechnung finden. In der **Algebra**, welche nichts anders ist, als eine allgemeine Arithmetik, sucht man das unbekannte durch Hülfe gewisser Gleichungen zu entdecken. Eine Gleichung aber entsteht, wenn man einerley Grösse auf zweyerley Art ausdrückt.

§. 7.

Die Anzahl der Theile oder Wissenschaften, aus denen die angewandte Mathematik bestehet, läßt sich nicht genau angeben, indem sie so viel Theile enthalten kann, als es Gegenstände in der Natur giebt, auf welche sich die Lehren der reinen Mathematik anwenden lassen, daher auch immer noch diese Anzahl durch den Fleiß der Gelehrten vermehrt wird. Insgemein aber pflegt man folgende Wissenschaften zur angewandten Mathematik zu rechnen: Die **Statik, Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik, Aerometrie, Optik, Katoptrik, Dioptrik, Perspectiv, Astronomie, Chronologie, Geographie,** und **Gnomonik.** Die **Statik** enthält die mathematischen Lehren von dem Gleichgewichte fester Körper, von deren wirklichen Bewegung die **Mechanik** handelt. Mit dem Gleichgewichte flüßiger Körper beschäftiget sich die **Hydrostatik,** und mit ihrer Bewe-

gung die **Hydraulik**. Die Luft ist der Gegenstand der **Aerometrie**, und das Licht der **Optik**, **Katoptrik** und **Dioptrik**. In der **Optik** nemlich betrachtet man diejenigen Lichtstrahlen, die in gerader Linie in unser Auge kommen; in der **Katoptrik** solche, die von polirten Flächen, dergleichen die Spiegel sind, zurück geworfen werden; und in der **Dioptrik** solche, die in durchsichtigen Materien gebrochen werden. Die **Perspectiv** lehret die Gegenstände so zeichnen, wie sie in das Gesicht fallen. Von der Bewegung, Grösse und Entfernung der Gestirne handelt die **Astronomie**. Von der Ausmessung und Eintheilung der Zeit die **Chronologie**, und von der Eintheilung des Raums auf der Erde die **Geographie**. Die **Gnomonik** lehrt Uhren verfertigen, durch welche man vermittelst des Schattens der Sonne oder eines andern Gestirns die Stunde des Tages wissen kann. In vielen mathematischen Lehrbüchern pflegt man auch die **bürgerliche Baukunst**, **Artillerie** und **Kriegs-Baukunst** als Theile der angewandten Mathematik zu betrachten. Es ist auch nicht zu leugnen, daß alle diese Künste sich auf die Lehren der Arithmetik und Geometrie gründen. Allein da der Gegenstand der bürgerlichen und der Kriegs-Baukunst gröstentheils von der Willkühr der Menschen abhängt, die Philosophie aber, wovon die Mathematik ein Theil ist, nur solche Gegenstände betrachtet, die von der Einrichtung des Schöpfers, und nicht von der Willkühr der Menschen herrühren; so kann man dieselben, wenn man genau verfahren will, eigentlich nicht zur Mathematik rechnen, zumal da noch eine Menge andre Kenntnisse

zu ihrer Ausübung nöthig sind, die nicht die bloße Mathematik verschaffen kann.

§. 8.

Der Nutzen der Mathematik ist sehr vielfach. Es ist aber schwer, sich von allen den Vortheilen zu überzeugen, welche diese Wissenschaft dem menschlichen Geschlechte verschaffet, ehe man sich die vornehmsten Theile davon bekannt gemacht hat. Ich will also gegenwärtig mich in keine ausführliche Abhandlung über diese Materie einlassen, sondern meinen jungen Lesern nur kürzlich die Ursachen erklären, warum man das Studium der Mathematik allen Jünglingen so nachdrücklich empfehlen muß. Erstlich enthält die Mathematik eine Menge Sätze und Lehren, ohne welche man sich vergebens um eine gründliche Erkenntniß der Natur und der meisten Künste, die zur Nothwendigkeit und zum Vergnügen des menschlichen Lebens gehören, bewerben würde. Selbst die Gottesgelahrheit, die Rechtswissenschaft und Arzneykunst hat ihrer Hülfe sehr oft nöthig; und der Kaufmann und Handwerker kann sich durch die Kenntniß derselben in den Stand setzen, seine Fabriken und Manufacturen zu einer viel grössern Vollkommenheit zu bringen. Zum andern aber nützt auch die Mathematik schon durch die Art und Weise, wie sie in gründlichen Schriften abgehandelt wird, welches vorzüglich die Ursache war, weswegen die griechischen Philosophen ihre Erlernung so sehr anprieſen, und einige von ihnen denen so gar den Eingang in ihre philosophischen Vorlesungen versagten, die sich noch nicht mit den Anfangsgründen der Geometrie bekannt ge-

macht hatten. Durch die Richtigkeit der Beweise und durch die Ordnung, welche man bey dem Vortrage mathematischer Lehren zu beobachten pflegt, wird der Verstand dessen, der sich fleißig mit dem Ueberdenken solcher Wahrheiten beschäftiget, nach und nach zur Gründlichkeit und zum Scharfsinn gewöhnt, so daß er auch hernach in solchen Dingen, die nicht mathematisch sind, richtiger denken und schärfer beweisen lernt, als andre, welche ihren Verstand durch das Studium der Mathematik nicht geschärft haben.

Die

Die Arithmetik.

Erstes Capitel.
Erklärungen und Grundsätze.

§. 1.

Die **Arithmetik**, wie den Lesern aus dem Vorberichte §. 6. noch bekannt seyn wird, ist diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaften der unstetigen Grössen erklärt, und aus einigen bekannten andre unbekannte finden lehrt. Die unstetigen Grössen erhalten auch den Namen der **Zahlen**, die also entstehen, wenn man eine Menge einzelner Dinge von einer Art zusammen nimmt. Jedes von diesen Dingen enthält den Namen der **Einheit**, und folglich läßt sich keine Zahl ohne eine Einheit gedenken.

§. 2.

Man theilt die Zahlen in **ganze** und **gebrochne** ein. Die **ganzen** Zahlen entstehen, wenn man die Einheit völlig etliche mal nimmt; die **gebrochnen** hingegen, oder die **Brüche**, wenn nur ein Theil der Einheit einige mal gesetzt wird. Also wäre eine Menge von sieben Thalern eine ganze Zahl, hingegen drey Viertel eines Thalers ein Bruch. Zahlen, die aus ganzen und gebrochnen zusammen gesetzt sind, heissen **vermischte** Zahlen. Da aber

die

die Wahl der Einheit willkührlich ist, so wird man leicht einsehen, daß eine, und eben dieselbe Grösse so wohl eine ganze Zahl als auch ein Bruch seyn kann, nach Beschaffenheit derjenigen Grösse, die man zur Einheit erwählet. Z. E. wenn ich eine gewisse Summe Geldes in eine Zahl verwandeln wollte, so könnte ich entweder eine kleinere oder grössere Grösse, als sie selbst ist, zur Einheit annehmen; im ersten Falle würde ich eine ganze oder vermischte, und im andern Falle eine gebrochne Zahl erhalten. Sechzehn Groschen ist eben so viel, als zwey Drittel eines Thalers. Man pflegt aber bey Erwählung der Einheit dieses zu beobachten, daß man bey ansehnlichen Grössen nicht allzu kleine Einheiten, und bey sehr kleinen Grössen nicht allzu grosse Einheiten annimmt. So bestimmen die Astronomen die Entfernungen der himmlischen Weltkörper von einander, nicht in Zollen oder Ellen, weil alsdenn zu grosse, und für das Gedächtniß zu beschwerliche Zahlen entstehen würden, sondern in halben Erddiametern oder wenigstens in Meilen. Hingegen bey der Bestimmung der Weite eines Hauses von einem andern nimmt man nicht den halben Erddiameter, weil man sonst ohne Noth einen grossen Bruch erhalten würde, sondern eine viel kleinere Grösse, nemlich eine Ruthe, Elle oder Schuh zur Einheit an.

§. 3.

Wenn bey einer Zahl zugleich angezeigt wird, was die Einheit für ein Ding sey, so wird sie eine **benannte** oder **bestimmte** Zahl genannt. Die übrigen, wo man nur die Menge der Einheiten anzeigt, heissen **unbenannte** oder **unbestimmte** Zahlen. Z. E. Drey Thaler, acht Ellen sind benannte,

hin-

hingegen drey und achte unbenannte Zahlen. Einige theilen die Arithmetik in die **theoretische** und **practische** ein; alsdenn heißt die **theoretische** derjenige Theil derselben, welcher sich mit den unbenannten, und die **practische** derjenige, welcher sich mit den benannten Zahlen beschäftiget. **Homogene** oder **gleichartige** Zahlen nennt man solche, die sich auf einerley Einheit beziehen; und **heterogene** oder **ungleichartige** solche, die nicht einerley Einheit haben. Z. E. Fünf Ducaten und drey Ducaten sind gleichartige, hingegen fünf Ducaten und drey Meilen ungleichartige Zahlen.

§. 4.

Jede Veränderung, die man mit den Zahlen vornehmen kann, betrift entweder eine Vermehrung oder eine Verminderung. Aus dem vorhergehenden aber wird man leicht einsehen, daß sich eine Zahl nur durch gleichartige Zahlen vermehren oder vermindern läßt. Wenn man nun eine Zahl vermehrt, so setzt man entweder ungleiche oder gleiche Zahlen zu einander. Und wenn man eine Zahl vermindert, so nimmt man eine andre gleichartige entweder nur einmal von ihr weg, oder so oft, als es möglich ist, bis sie selbst erschöpft wird. Es giebt also bey den Zahlen zwey Arten der Vermehrung, und zwey Arten der Verminderung. Die beyden Arten der Vermehrung heissen **addiren**, und **multipliciren**; die beyden Arten der Verminderung **subtrahiren** und **dividiren**, und diese machen die so genannten vier **Species** der Arithmetik aus.

§. 5.

Addiren ist also nichts anders, als aus etlichen gegebenen Zahlen oder Grössen eine andre finden, die allen

allen gegebenen zusammen genommen gleich ist. Diese neue Zahl oder Grösse, welche durch die Addition entstehet, wird die **Summe** oder das **Aggregat** genannt. Das Zeichen der Addition ist ✠, und wird **plus** ausgesprochen. Z. E. 8 ✠ 9 ✠ 3 ist so viel, als die Summe aus den Zahlen Achte, Neune und Drey, d. i. die Zahl Zwanzig, und a ✠ b ✠ c wäre die Summe aus drey Grössen, die man mit dem Buchstaben a, b, c benennt hätte.

§. 6.

Multipliciren heißt aus zwey Zahlen eine dritte finden, indem man die eine so oft zu sich selbst setzt, als eine andre Einheiten hat. Diejenige Zahl, die etliche mal zu sich selbst gesetzt werden soll, heißt der **Multiplicandus**, die andre, welche anzeigt, wie vielmal dieses geschehen muß, der **Multiplicator**, und beyde die **Factores**. Die neue Zahl, die nach der Multiplication entsteht, wird das **Product** oder **Factum** genannt. Das Zeichen der Multiplication ist ✕ oder ein Punct. Z. E. 8 ✕ 9 oder 8 . 9, will so viel sagen, die Zahl Achte soll neunmal genommen werden. Hier ist also Achte der Multiplicandus, Neune der Multiplicator, und Zwey und Siebenzig würde das Product seyn. Bey den Buchstaben pflegt man auch oft diese Zeichen ganz wegzulassen, und sie blos neben einander zu setzen, wenn man die Multiplication derselben anzeigen will, weil hier keine Verwirrung, wie bey den Zahlzeichen, die ihren Werth aus der Stelle erhalten, zu besorgen ist. Wollte man also das Product aus der Grösse a in die Grösse b andeuten, so dürfte man nur schreiben ab.

§. 7.

§. 7.

Subtrahiren heißt eine Zahl aus einer andern gleichartigen ein einziges mal wegnehmen, um zu erfahren, wie viel die eine mehr Einheiten hat, als die andre. Die gefundne Zahl, woraus sich dieses ersehen läßt, erhält daher den Namen des **Unterschiedes** oder der **Differenz**. Das Zeichen der Subtraction ist ein Querstrich, welcher zwischen die beyden gegebenen Zahlen gesetzt, und **minus** oder **weniger** ausgesprochen wird. Z. E. 8 — 3 zeigt an, daß die Zahl Drey aus der Zahl Achte weggenommen werden soll.

§. 8.

Dividiren ist diejenige Verminderung einer Zahl, da man eine andre so vielmal aus ihr wegnimmt, bis sie völlig erschöpft ist, oder, welches eben so viel sagen will, da man untersucht, wie oft die eine von den gegebenen Zahlen, welche der **Divisor** heißt, in der andern, welche der Dividentus genannt wird, enthalten ist. Die durch die Division gefundene Zahl erhält den Namen des **Quotienten**. Das Zeichen der Division besteht in zwey Puncten oder in einem Striche, über welchen der Dividendus und unter welchen der Divisor gesetzt wird. Z. E. 8 : 2 oder $\frac{8}{2}$ heißt so viel als, die Zahl Achte soll durch die Zahl Zwey dividirt werden. Achte ist also der Dividendus, Zwey der Divisor, und Vier würde der Quotient seyn.

Grundsätze.

§. 9.

Jede Grösse ist sich selbst gleich, und statt der einen kann man allemal eine andere setzen, die ihr

gleich

gleich ist. Z. E. das Product 2 ✕ 6 ist so viel als die Summe 8 ✠ 4. Ich würde daher, wenn es eine Bequemlichkeit im Rechnen erforderte, statt des Products 2 ✕ 6 die Summe 8 ✠ 4 und so auch umgewendet setzen können.

§. 10.

Alle Theile einer Grösse zusammen genommen sind dem Ganzen gleich, und folglich ist jeglicher Theil oder einige Theile allemal kleiner als das Ganze, und das Ganze grösser als ein oder etliche Theile. Es bedeute z. E. G ein Ganzes, und a, b, c, alle seine Theile, so werde ich hieraus folgendes schliessen können. G ist so groß als a ✠ b ✠ c und G ist grösser, als a, grösser als b, grösser als c, grösser als a ✠ b, oder a kleiner als G; b kleiner als G; a ✠ b kleiner als G u. s. w. Das Zeichen gleicher Grössen ist = und ungleicher ≷, so daß man die Spitze dieses Zeichens gegen die kleinere setzt. Das vorige Beyspiel würde man also folgendergestalt ausdrücken können.

G = a ✠ b ✠ c
G ≷ a
G ≷ b
G ≷ c
G ≷ a ✠ b
oder a ≶ G
b ≶ G &c.

§. 11.

Wenn zwey Zahlen oder Grössen einer dritten gleich sind, so müssen sie einander selbst gleich seyn. Z. E. wenn die Grösse b der Grösse q, und die Grösse c ebenfalls der Grösse q gleich ist, so folgt, daß b so groß ist wie c; oder in Zahlen, wenn der Quotient

tient $\frac{6}{2}$ und die Differenz $8 - 5$ der Zahl drey gleich sind, so muß nothwendig der Quotient $\frac{6}{2}$ der Differenz $8 - 5$ gleich seyn. Durch Zeichen würde man diese beyden Exempel also schreiben:

$$\begin{array}{rcl} b & = & q \\ c & = & q \\ \hline b & = & c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{6}{2} & = & 3 \\ 8 - 5 & = & 3 \\ \hline \frac{6}{2} & = & 8 - 5 \end{array}$$

Hierbey ist noch zu merken, daß der Strich nach der zweyten Zeile ebenfalls eine Bedeutung hat, und eigentlich durch die Worte: **Hieraus folgt** oder **folglich ist** übersetzt werden muß. In den mathematischen Beweisen pflegt man allemal die Prämissen eines Schlusses über den Strich und die Conclusion unter denselben zu setzen.

§. 12.

Ist eine Grösse oder Zahl grösser oder kleiner, als die eine von zwey gleichen Grössen, so ist sie auch grösser oder kleiner, als die andere. z. E.

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ d & > & a \\ \hline d & > & b \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcl} 6 & = & 3 \times 2 \\ 8 & > & 6 \\ \hline 8 & > & 3 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ g & < & a \\ \hline g & < & b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 6 & = & 3 \times 2 \\ 5 & < & 6 \\ \hline 5 & < & 3 \times 2 \end{array}$$

§. 13.

Gleiches zu Gleichem addirt giebt gleiche Summen. z. E.

$$\begin{array}{rcl} m & = & f \\ d & = & g \\ \hline m + d & = & f + g \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rcl} 9 & = & 5 + 4 \\ 3 & = & 2 + 1 \\ \hline 9 + 3 & = & 5 + 4 + 2 + 1 \end{array}$$

§. 14.

Wenn man Gleiches von Gleichem subtrahirt, so entstehen gleiche Unterschiede, z. E.

$$\begin{array}{r} a = n \\ b = c \\ \hline a - b = n - c \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6}{3} = 2 \\ \hline \frac{8}{2} - \frac{6}{3} = 4 - 2 \end{array}$$

§. 15.

Wenn zu einer Grösse eine andre addirt, und von der Summe die letztere wieder abgezogen wird, so muß die Differenz der erstern gleich seyn. z. E.

$$a + b - b = a \quad \text{oder} \quad 9 + 4 - 4 = 9$$

§. 16.

Wenn von einer Grösse eine andere Grösse subtrahirt, und zu der Differenz die letztere wieder addirt wird, so muß die Summe der erstern gleich seyn. z. E.

$$d - m + m = d \quad \text{oder} \quad 7 - 5 + 5 = 7$$

§. 17.

Wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, so erhält man gleiche Producte. z. E.

$$\begin{array}{r} m = q \\ b = f \\ \hline m \times b = q \times f \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 2 \text{ Thaler} = 3 \text{ Gulden.} \\ 4 \qquad\quad = 4 \\ \hline 2 \times 4 \text{ Thaler} = 3 \times 4 \text{ Gulden.} \\ \text{d. i.} \quad 8 \text{ Thaler} = 12 \text{ Gulden.} \end{array}$$

§. 18.

Wird Gleiches mit Gleichem dividirt, so müssen die Quotienten gleich seyn. z. E.

$$\begin{array}{r} c = g \\ a = a \\ \hline \frac{c}{a} = \frac{g}{a} \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 36 = 4 \times 9 \\ 2 = 2 \\ \hline \frac{36}{2} = \frac{4 \times 9}{2} \end{array}$$

§. 19.

§. 19.

Wenn man eine Grösse durch eine andre Grösse multiplicirt, und das Product durch die letztere wieder dividirt, so muß der Quotient der erstern gleich seyn. z. E.

$$\frac{c \times d = c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{5 \times 6}{6} = 5$$

$$\frac{b \times g \times m = b}{g \times m} \qquad \frac{3 \times 4 \times 7 = 3}{4 \times 7}$$

§. 20.

Wenn man eine Grösse durch eine andre dividirt, und den Quotienten durch die letztere wieder multiplicirt, so muß das Product der erstern gleich seyn. z. E.

$$\frac{a}{c} \times c = e \quad \text{oder} \quad \frac{8}{3} \times 3 = 8$$

Zweytes Capitel.

Von den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 21.

Ehe wir uns mit der Vermehrung und der Verminderung der Zahlen selbst beschäftigen, wird es nöthig seyn, eine kurze Betrachtung über die Art und Weise, wie man die Zahlen bezeichnet, anzustellen. Da die Menge der Zahlen unendlich groß ist, so würde es unmöglich gewesen seyn, jeder Zahl ein besondres Zeichen und einen besondern Namen zu geben. Man hat also ein bequemes Mittel ersonnen, durch die Verbindung sehr weniger Zeichen und Na-

men alle mögliche Zahlen auszudrücken, und dieſes Mittel, deſſen man ſich jetzt faſt überall bedient, iſt folgendes: Man nimmt neun Zeichen an, welche man Zahlen bedeuten läßt, und über dieſes noch ein anderes, das man Null nennt, und welches die Abweſenheit aller Zahlen andeutet. Um alſo mit dieſen wenigen Zeichen alle mögliche Zahlen anzuzeigen, ſo giebt man ihnen einen verſchiedenen Werth nach der Verſchiedenheit ihrer Stellen, die man von der Rechten gegen die linke zu zählet. Nämlich ein jedes Zahlzeichen bedeutet in der zweyten Stelle zehnmal mehr, als in der erſten, in der dritten zehnmal mehr, als in der zweyten, in der vierten zehnmal mehr, als in der dritten, und überhaupt in jeder Stelle weiter gegen die linke zehnmal mehr, als in der vorhergehenden. Die Zeichen ſelbſt, die man auch **Zifern** zu nennen pflegt, ſind folgende 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. wie unſern jungen Leſern ſchon hinlänglich bekannt ſeyn wird. Wenn man alſo die Einheit in die zweyte Stelle ſetzt, welche man dadurch andeutet, daß man die erſte Stelle mit 0 anfüllt, (10) ſo bedeutet ſie eine zehnfache Einheit, oder einen **Zehner** nach unſrer Sprache. In der dritten Stelle (100) einen zehnfachen Zehner oder **Hunderter**; in der vierten Stelle (1000) einen zehnfachen Hunderter, d. i. einen **Tauſender**; in der fünften Stelle (10000) einen zehnfachen Tauſender, u. ſ. w. welche Namen man aus den vorhergehenden zuſammen ſetzt. Einen tauſendfachen Tauſender, oder die Einheit in der ſiebenten Stelle (1000000) nennt man auch der Kürze wegen eine **Million**; tauſendmal tauſend Millionen (1000 000 000 000) eine Billion; tauſendmal tauſend, oder eine Million Billionen eine **Trillion**, u. ſ. w. Da nun aus den Einheiten die

Zahlen entstehen, so wird man leicht einsehen, wie es möglich sey, durch die Zusammensetzung der angeführten Figuren, deren Werth eben so, wie der Werth der Einheiten mit ihren Stellen zunimmt, auch die grösten Zahlen auf eine leichte Art auszudrücken. In Ansehung der Bezeichnung ist noch dieses zu erinnern, daß man die verschiednen Classen von Einheiten auch folgendergestalt anzuzeigen pflegt.

Nämlich	I	schreibt man auch	I^{o}	
	IO	— —	I^{I}	
	IOO	— —	I^{II}	
	IOOO	— —	I^{III}	
	IOOOO	— —	I^{IV}	
	IOOOOO	— —	I^{V}	u. s. f.

und so auch die übrigen Zahlzeichen, welches in vielen Fällen einige Bequemlichkeit verschaft. Man wird diese Art zu schreiben leicht merken können, wenn man nur erwägt, daß die römische Zifer, die oben rechter Hand gesetzt wird, die Anzahl der Nullen vorstellt, womit man auf die gewöhnliche Art die Stelle einer Zahl, oder ihren eigentlichen Werth andeutet. 9^{VII} ist eben so viel, als 90000000. Uebrigens heissen **einfache** Zahlen solche, die mit einer Zifer, und **zusammengesezte** diejenigen, die mit mehr als einer Zifer geschrieben werden müssen. Also wäre 9 eine einfache, und 38 eine zusammengesetzte Zahl.

§. 22.

Wenn man das vorige recht versteht, so wird man keine besondre Anweisung nöthig haben, eine vorgesagte Zahl durch die üblichen Zeichen auszudrücken, oder eine geschriebene Reihe von Zahlen gehörig auszusprechen, welches in der Arithmetik **Numeriren** genannt wird. Sollte man also folgende Zahl: **Acht Millionen, vier Tausend drey Hundert**

und Vierzig schreiben, so dürfte man sich nur an die vorhin erklärten Regeln erinnern, daß die Millionen in der siebenten Stelle, die Tausende in der vierten, die Hunderte in der dritten, und die Zehner in der zweyten Stelle zu stehen kommen, und die Null alsdenn gebraucht wird, wenn es von einer gewissen Classe keine Zahl giebt, und doch der folgenden wegen die Stelle bemerkt werden muß, nemlich:

8004340.

Eben so leicht wird es seyn, die größte Reihe von Zahlen richtig zu lesen, wenn man die Zifern nur erst von der Rechten gegen die linke zu betrachtet, und sich zu Vermeidung der Verwirrung einige Stellen durch gewisse willkührliche Zeichen bemerkt. z. E. es sey folgende Reihe gegeben:

t . b . m .

4 3 5 6 7 8 2 9 3 6 4 0 0 0 0 8 5 2 3

Wir wollen uns, um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, die Hunderte mit einem Pünctchen unter der Zifer, und die Tausende durch ein Pünctchen über der Zifer; die Millionen durch m, die Billionen durch b, die Trillionen durch t, u. s. f. bemerken. Nun werden wir also die Zahl, wie unsre übrige Schrift, von der linken gegen die Rechte zu, ohne Schwierigkeit lesen können, wenn wir nur noch den kleinen Eigensinn des Sprachgebrauchs bemerken, daß man bisweilen die kleinere Zahl vor der grössern auszusprechen pflegt, denn 23 sollte man eigentlich lesen, zwanzig und drey, die Gewohnheit aber verlangt, drey und zwanzig zu sprechen. Die vorige Reihe von Zahlen würde daher folgendergestalt ausgesprochen werden: Vier Trillionen, drey hundert sechs und funfzig tausend sieben hundert

dert und zwey und achtzig Billionen, neun hundert sechs und dreyßig tausend vier hundert Millionen, acht Tausend, fünf hundert und drey und zwanzig.

§. 23.

Ob man gleich an diese Art bis auf zehen zu zählen von Kindheit an gewöhnt ist, so daß sie vielen Ungeübten als eine nothwendige Sache vorkommen wird, so ist dieselbe doch in der That eben so willkührlich, als es die Zifern sind, womit die Zahlen bezeichnet werden, daher einige Gelehrte andre Arten zu zählen erfunden haben. So lehrt z. E. der berühmte Baron Leibnitz durch das Zeichen der Einheit und Null alle mögliche Zahlen zu schreiben. Nemlich er nimmt dieses willkührliche Gesetz an, daß die folgende Stelle von der Rechten gegen die Linke zu gerechnet, allemal zweymal so viel bedeuten soll, als die vorhergehende. Nach dieser Art zu zählen, welche man die Leibnitzische Dyadik nennt, weil man nur bis auf zwey zählt, würde also

10	so viel bedeuten	—	als	2
11	—	—	—	3
100	—	—	—	4
101	—	—	—	5
110	—	—	—	6
111	—	—	—	7
1000	—	—	—	8
1001	—	—	—	9
1010	—	—	—	10
1011	—	—	—	11
1100	—	—	—	12
1101	—	—	—	13
1110	—	—	—	14
1111	—	—	—	15
10000	—	—	—	16 u. s. f.

§. 24.

Nachdem wir uns also die nothwendigsten Erklärungen, Grundsätze und Zeichen der Zahlen bekannt gemacht haben, so wollen wir die vier Rechnungsarten selbst kürzlich durchgehen. Wir machen also den Anfang mit der Addition, welche aus einigen gegebenen Zahlen eine neue finden lehrt, die so viel Einheiten enthält, als alle gegebene zusammen genommen. Da sich aber eine Zahl nur durch gleichartige Zahlen vermehren läßt, (§. 4.) so ist klar, daß die Addition bey solchen Zahlen nicht statt finden wird, die sich auf verschiedne Einheiten beziehen. Man kann also 3 Stunden und 5 Thaler unmöglich zusammensetzen. Aus eben dem Grunde läßt sich leicht einsehen, daß die Summe sich auf eben die Classe von Einheiten beziehen muß, auf welche sich die addirten Zahlen beziehen. Addirt man Einer, so wird die Summe auch Einer bedeuten, addirt man Zehner, so wird man zur Summe auch Zehner erhalten, u. s. f.

§. 25.

Die meisten Zahlen, welche addirt werden sollen, sind zusammengesetzt, und können wegen ihrer Grösse nicht auf einmal addirt werden, daher pflegt man die gleichartigen Theile derselben unter einander zu setzen, und sie nach und nach zusammen zu zählen, weil es nach dem Grundsatze §. 10. einerley seyn muß, ob ich ein Ganzes zu einem andern Ganzen auf einmal addire, oder ob ich alle Theile des einen zu den Theilen des andern hinzu setze, worzu nur dieses erfordert wird, daß man im Stande sey, zwey einzelne Zahlen auf einmal zu addiren, welches man im Anfange durch die Finger oder durch Rechenpfennige so

lange

lange zu thun pflegt, bis man durch die Uebung dieses Zusammenzählen in Gedanken verrichten kann. Wir wollen also setzen, folgende Zahlen sollen addirt werden, 3458, 457, 1832, 4378, 37; diese muß man zuerst also schreiben, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. f. zu stehen kommen, §. 24. nämlich:

```
 3 4, 5 8,
   4 5, 7,
 1 8, 3 2
 4 3 7, 8,
     3 7
-------------
 1 0 1 6 2
```

Hierauf ziehe man einen Strich, und zähle alle Einer, alle Zehner, alle Hunderte und alle Tausende zusammen. Weil nun zehn Einer einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter u. s. f. ausmachen, so würde man erstlich bey den Einern nur Achtung geben dürfen, wie vielmal man bis auf zehen habe zählen können, und wie viel noch übrig geblieben sey. So vielmal man bey den Einern bis auf zehen zählen kann, so viel hat man Zehner, die man also zur folgenden Reihe rechnen muß. Eben so würde man auch mit den folgenden Reihen verfahren können, um die Summen derselben zu erhalten. Damit man es aber nicht vergißt, wie vielmal man bis zehen gezählt hat, sonderlich bey grossen Exempeln, so pflegt man sich bey den Zahlen durch einen Punct oder Strich ein Merkmal zu machen; hernach zählt man die Striche oder Puncte, und rechnet so viel Einheiten zur folgenden Reihe, als man solcher Puncte oder Striche gezählt hat. Die vorigen Zahlen würde man daher also addiren: 7 und 8 Einer sind 15, folglich 5 Einer über einen Zehner; diesen Zehner bemerke ich

bey der 8 durch ein Comma. 5 Einer und die folgenden 2 machen 7, und diese wieder addirt zu 7, so viel als 14, d. i. 4 über 10, daher ich wieder das vorige Merkmal bey der 7 anbringe. Die jetzt übrig gebliebene 4 und 8 geben 12 Einer, d. i. 2 Einer über einen Zehner. Nunmehr setze ich, da keine Einer mehr zu addiren sind, diese 2 übrig gebliebenen unter den Strich an die Stelle der Einer, und addire die folgende Reihe der Zehner, wie die vorige, indem ich noch die 3 Zehner, die aus der Addition der Einer entstunden, darzu zähle, so erhalte ich 6 Zehner, welche ich in die gehörige Stelle setze, und 2 Hunderte, die ich zur folgenden Reihe nehme, wo sich die Hunderte befinden. Zähle ich nun auf gleiche Art alle Hundert zusammen, so erhalte ich 1 Hunderter und 2 Tausende; rechne ich endlich diese 2 Tausende zu der 4ten Reihe, wo die Tausende stehen, so erhalte 10 Tausende, und folglich zur ganzen Summe 10162. Die beste Probe der Addition ist, daß man ein Exempel mehr als einmal rechnet. Erhält man allemal einerley Summe, so kann man nach der grösten Wahrscheinlichkeit schliessen, daß man richtig addirt habe.

§. 26.

Die benannten Zahlen werden eben so, wie die unbenannten, addirt, nur daß man genau wissen muß, wie viel kleinere Einheiten eine grössere Einheit ausmachen. Im Anhange sollen daher einige Tabellen von der verschiedenen Eintheilung des Geldes, Maasses und Gewichtes folgen. Weiß man also, daß ein Thaler 24 Groschen, und ein Groschen 12 Pfennige enthält, so wird man leicht Zahlen addiren können, die aus Thalern, Groschen und Pfennigen bestehen;

denn

denn bey den Pfennigen darf man nur immer bis auf 12, und bey den Groschen bis auf 24 zählen. So vielmal als man bey den Pfennigen bis auf 12 gezählt hat, so viel Einheiten müssen zu den Groschen gerechnet werden, und so vielmal bey den Groschen bis auf 24 gezählt worden ist, so viel Einheiten müssen zu den Thalern gerechnet werden. z. E.

235	Thaler	8,	Groschen	7, Pfennige.
102	—	20	—	5
18	—	9,	—	8,
200	—	15	—	3
25	—	6,	—	9,
16	—	16	—	6
599	—	5	—	2

Bey den Pfennigen kann ich 3 mal bis auf 12 zählen, und behalte noch 2 übrig. Die Summe der Pfennige beträgt also 3 Groschen und 2 Pfennige. Diese 2 Pfennige setze ich an die Stelle der Pfennige, und rechne die 3 Groschen zur folgenden Classe, welche lauter Groschen enthält. Bey den Groschen kann ich 3 mal bis auf 24 zählen, und behalte noch 5 Einheiten übrig. Die Summe aller Groschen beträgt daher 3 Thaler und 5 Groschen. Diese 5 Groschen setze ich wieder an die gehörige Stelle, und rechne die 3 Thaler zu der folgenden Classe der Thaler, so ist die ganze Addition geendiget.

§. 27.

Soll man eine zusammengesetzte Zahl von einer andern zusammengesetzten Zahl subtrahiren, so muß man ebenfalls die gleichartigen Theile unter einander setzen (§. 4.), und dieselben nach und nach von einander abziehen, wobey die Subtraction der einfachen und kleinern voraus gesetzt wird, welche man entweder in Gedanken, oder wenn man noch nicht

geübt

geübt genug ist, an den Fingern verrichtet. Ist der abzuziehende untere Theil grösser, als der obere, aus welchem er weggenommen werden soll, so geht man zur folgenden Classe linker Hand, und nimmt davon eine Einheit herüber, welches man **borgen** heißt, und durch einen Punct bemerkt. Eine solche Einheit muß also nothwendig 10 Einheiten der vorhergehenden Classe ausmachen. Hat man nun damit die zu kleine Zahl vermehrt, so zieht man die untere Zahl davon ab, und setzt den Unterschied an den gehörigen Ort, welches man so lange fortsetzt, bis man alle Theile der untern Zahl von allen gleichartigen Theilen der obern Zahl subtrahirt hat. z. E. es sey 25367 von 82932 abzuziehen, so schreibt man zuerst diese beyden Zahlen folgendergestalt:

8 · 2 9 · 3 · 2
2 5 3 6 7
5 7 5 6 5

Nunmehro fängt man bey den Einern an. Hier sollen 7 Einer von 2 Einern weggenommen werden, welches unmöglich ist, man geht also in die folgende Classe, und borgt von den 3 Zehnern eine Einheit, welches durch den Punct angedeutet wird. Dieser Zehner, welcher 10 Einer enthält, macht mit den 2 Einern 12 Einer aus, von denen ich nunmehr leicht 7 Einer wegnehmen kann, und noch 5 Einer übrig behalte, die man unter den Strich in die Stelle der Einer setzt. 6 Zehner von 2 Zehnern, (denn von den 3 Zehnern war vorhin einer geborgt worden) können ebenfalls nicht abgezogen werden, man muß also hier wieder von der folgenden Classe einen Hunderter borgen, welcher zehn Zehner gilt, und zu den 2 Zehnern hinzugesetzt, 12 Zehner ausmacht. Wenn man nun 6 Zehner von diesen 12 Zehnern abzieht, so bleiben

ben noch 6 Zehner übrig, welche wiederum unter den Strich in die Stelle der Zehner gesetzt werden. Statt der 9 Hunderte stelle ich mir oben nur 8 Hunderte vor, weil vorhin ein Hunderter zu den Zehnern genommen wurde, und ziehe davon die untern 3 Hunderte ab, welches ohne Borgen geschehen kann, und setze die übrig gebliebenen 5 Hunderte an die gehörige Stelle. 5 Tausende lassen sich aus 2 Tausenden wiederum nicht wegnehmen, es muß also ein Zehntausender geborgt, und zu den 2 Tausendern hinzugesetzt werden, wodurch 12 Tausende entstehen, von welchen sich 5 Tausende nunmehr leicht abziehen lassen. Der Ueberrest 5 Tausend wird an die Stelle der Tausende gesetzt, und endlich der letzte Theil, nemlich 2 Zehntausende von 7 Zehntausenden subtrahirt, wodurch man 5 Zehntausende, und also zur ganzen Differenz 57565 erhalten muß, weil alle Theile der untern Zahl aus der obern abgezogen worden sind, und alle Theile zusammen genommen dem Ganzen gleich gelten.

§. 28.

Man darf nur die Erklärung der Subtraction erwägen, so wird man von selbst schon einsehen, wie man den gefundenen Unterschied prüfen könne. Denn da der Unterschied diejenige Zahl ist, welche anzeigt, wie viel Einheiten in der grössern Zahl mehr enthalten sind, als in der kleinern, so muß die Summe aus der kleinern Zahl und der Differenz so viel betragen, als die grössere. Wollen wir also die Probe von dem vorigen Exempel machen, so dürfen wir nur den Unterschied und die kleinere Zahl addiren.

```
  25367
  57565
 -------
  82932
```

Die

Die Summe von beyden beträgt 82932 und ist folglich der grössern von den gegebenen Zahlen, aus welcher subtrahirt wurde, gleich, wodurch die Richtigkeit der Rechnung vollkommen bestätiget wird.

§. 29.

Bisweilen steht an dem Orte, wo man borgen will, eine Null, von welcher sich nichts wegnehmen läßt, weil sie keine Zahl bedeutet. In diesem Falle geht man weiter, bis man eine wirkliche Zahl antrift, und verfährt folgendergestalt: Es sey z. E. von 403 die Zahl 276 abzuziehen

```
4 0 3
2 7 6
-----
1 2 7
```

Sechs Einer lassen sich nicht von 3 Einern abziehen, ich sollte daher einen Zehner borgen, weil aber in der Stelle der Zehner eine Null stehet, so gehe ich zu den Hunderten, nehme einen davon, und setze ihn in Gedanken an die Stelle der Zehner, wo er 10 Einheiten bedeutet, von welchen 10 Zehnern ich einen zu den 3 Einern hinzusetze, die nunmehr zusammen genommen 13 Einer ausmachen müssen. Ich stelle mir nunmehr die obere Zahl 403 eigentlich also vor, 3 Hunderte, 9 Zehner, und 13 Einer, in welcher Gestalt ich hernach die Subtraction nach den vorigen Regeln verrichte, und zum Unterschiede 127 erhalte. Man wird also aus dieser Erklärung die Ursache leicht einsehen, warum man sich an dem Orte, wo eine Null steht, wenn man hat borgen müssen, 9 Einheiten vorstellt.

§. 30.

Bisher haben wir solche Fälle betrachtet, wo die zusammengesetzte Zahl, welche subtrahirt werden soll,

kleiner

kleiner ist, als diejenige, aus welcher sie weggenommen werden muß; es giebt aber auch Fälle, wo ein grösseres Ganze von einem kleinern subtrahirt werden soll; in solchen Fällen nimmt man so viel weg, als möglich ist, und bemerkt durch das Zeichen der Subtraction, wie viel man noch eigentlich hätte wegnehmen sollen. z. E. es sey 25 von 20 zu subtrahiren. Aus 20 Einern kann man aufs höchste nur wieder 20 Einer wegnehmen. Folglich würde ich hier 5 Einer übrig behalten, die subtrahiret werden sollten, und nicht subtrahirt werden könnten, welche Differenz durch — 5 ausgedrückt wird. Eben so wäre

$$7 - 9 = -2$$

oder $$5 - 8 = -3$$

Man subtrahirt also in dergleichen Fällen eigentlich umgewendet, und setzt zu dem Ueberreste, um dieses anzudeuten, das Zeichen — oder minus. Dergleichen Unterschiede pflegt man auch **negative** Zahlen zu nennen, und setzt sie den **positiven** entgegen, welche man entweder an dem Zeichen + oder an der Abwesenheit eines Zeichens erkennet, und deren Entstehungsart man sich so vorstellen kann, daß eine kleinere Zahl von einer grössern abgezogen worden sey. Man nennt überhaupt diejenigen Grössen von einer Art **entgegengesetzt**, die man unter solchen Bedingungen oder Umständen betrachten kann, wo eine durch die andere vermindert wird. Setzt man die eine als **positiv** oder **bejahend**, welches von unsrer Willkühr abhängt, so wird die andre, welche ihr entgegengesetzt ist, **negativ** oder **verneinend** genannt. z. E. 100 Schulden und 100 Thaler baares Geld sind Grössen von einer Art, wenn ich aber das Vermögen eines Menschen bestimmen will, so muß ich dasjenige, was er andern schuldig ist, von demjenigen,

gen, was er wirklich besitzt, abziehen, und folglich wird das baare Geld oder wirkliche Vermögen durch die Schulden vermindert, daher man das baare Geld und die Schulden als entgegengesetzte Grössen ansehen muß. Betrachtet man nun das baare Geld als positiv, so werden die Schulden negativ seyn; wollte man aber die Schulden für positiv annehmen, so würde das baare Geld negativ seyn. Im ersten Falle, wenn nemlich das baare Geld oder wirkliche Vermögen als positiv angenommen wird, hätte also folgender mathematische Ausdruck: **Cajus besitzt 1500 Thaler negatives Vermögen**, diese Bedeutung: **Cajus ist nicht nur ganz ohne Vermögen, sondern er ist noch über dieses 1500 Thaler schuldig.** Hieraus kann man zugleich den Grund einsehen, warum die negativen Grössen **weniger als nichts** genannt werden. Wer ohne Vermögen, und noch über dieses 1500 Thaler schuldig ist, der besitzt in der That noch weniger, als der, der zwar nicht einen Pfennig im Vermögen, aber auch keine Schulden hat. Der Ausdruck, **weniger als nichts**, muß also nicht unrecht verstanden werden; denn wenn man die negativen Grössen nicht in Beziehung auf die positiven betrachtet, so sind sie mehr als nichts, und überhaupt eben so gut wirkliche Grössen, als die positiven. Dergleichen entgegengesetzte Grössen würde man auch bey der vorwärts und rückwärts, bey der oberwärts und unterwärts gehenden Bewegung eines Körpers, und in vielen andern Fällen mehr haben. Setze ich nemlich die Bewegung eines Körpers von Abend gegen Morgen als positiv, so würde die entgegengesetzte von Morgen gegen Abend negativ seyn; nenne ich die Bewegung eines Körpers in die Höhe positiv, so muß ich die entgegen-

gegengesetzte Bewegung in die Tiefe als negativ ansehen.

§. 31.

Die Subtraction der benannten Zahlen erfordert keine besondere Regeln, wenn man nur die Eintheilung der Dinge weiß, welche die benannten Zahlen anzeigen. Wer unbenannte Zahlen von einander subtrahiren kann, wird von 239 Centnern 18 Pfunden 4 Lothen, die Zahl 48 Centner 83 Pfund 20 Loth leicht abziehen können, wofern ihm nur bekannt ist, daß der Centner 110 Pfund und das Pfund 32 Loth enthält. Die Rechnung selbst würde folgende seyn:

2	39	Centn.	18	Pf.	4 Loth.
48	;		83	;	20 ;
190	Centn.		44	Pf.	16 Loth.

Zuerst soll man 20 Loth von 4 Loth wegnehmen, welches nicht angeht, man muß also von den 18 Pfunden eins borgen. Ein Pfund oder 32 Loth verbunden mit 4 Loth macht 36 Loth, von welchen nunmehr 20 Loth weggenommen werden können. Der Ueberrest ist 16 Loth. 83 Pfund lassen sich von 17 Pfund auch nicht abziehen. Borgt man also 1 Centner, d. i. 110 Pfund, und setzt diese zu 17 Pfund, so erhält man 127 Pfund, von welchen der Abzug der 83 Pf. möglich ist, welches keiner weitern Erklärung bedarf. Der ganze Unterschied, wenn man noch die übrigen Zahlen von einander subtrahirt, muß also seyn 190 Centner 44 Pfund 16 Loth.

§. 32.

Sollen Zahlen in einander multipliciret werden. so sind entweder beyde Factores einfach, oder nur ei-

ner, oder keiner. Die Multiplication der zusammengesetzten Zahlen setzt die Multiplication der einfachen voraus. Daher mit dieser der Anfang gemacht werden muß. Wenn man die Erklärung der Multiplication §. 6. erwägt, so wird man leicht einsehen, daß sie nichts anders ist, als eine wiederhohlte Addition. Man würde also z. E. das Product aus der Zahl 6 in die Zahl 5 leicht finden können, wenn man die Zahl 6 fünfmal zu sich selbst addirte. Man kann sich daher durch Hülfe der bloßen Addition ein Täfelchen aufsetzen, worinnen die Producte aller einfachen Zahlen enthalten sind, und welches man das **Pythagorische Täfelchen** oder das **Einmaleins** zu nennen pflegt. Man verzeichnet sich nemlich ein Viereck, und theilet dasselbe in 9 Reihen, und jede Reihe wieder in 9 Fächer oder kleinere Vierecke. In die oberste Reihe schreibt man die 9 einfachen Zahlen nach ihrer Ordnung, nun addirt man jede Zahl zu sich selbst, um das doppelte davon zu erhalten, und setzt dieses doppelte einer jeden Zahl in die zweyte Reihe. Zu jeglicher Zahl der zweyten Reihe addirt man wieder die darüber stehende Zahl der ersten Reihe, wodurch man nothwendig das dreyfache von jeder obern Zahl erhalten muß. Dieses dreyfache kömmt in die dritte Reihe; und wenn man nun hierzu wieder das einfache oder die Zahlen der ersten Reihe hinzusetzt, so entsteht das vierfache von jeder Zahl, welches in die vierte Reihe geschrieben wird. Fährt man nun mit dieser Beschäftigung fort, indem man immer die letzte Reihe und die obern Zahlen zusammen addirt, bis man auf das neunfache gekommen ist, so muß man hierdurch eine Tabelle, wie die folgende, erhalten, worinne sich die Producte aller einfachen Zahlen in einander befinden, die man hernach

bey

bey der Multiplication der zusammengesetzten Zahlen sehr vortheilhaft gebrauchen kann.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

Es sey also durch Hülfe des hier verzeichneten Täfelchens das Product 7 ⋉ 8 zu bestimmen. Wenn ich nachsehe, was für eine Zahl in der achten Reihe unter der 7 steht, so werde ich die Zahl 56 finden, welche also das achtfache von 7 oder das Product 7 ⋉ 8 seyn muß. Eben dieses Product würde ich auch erhalten, wenn ich das siebenfache von der Zahl achte suchte, woraus man also sehen kann, daß siebenmal acht so viel ist als acht mal sieben, und daß es also einerley seyn muß, ob ich die Zahl acht als den Multiplicator oder als den Multiplicandum betrachte. Eben dieses wird man in allen übrigen Beyspielen finden, daher man sich den Satz merken kann, daß di Ordnung der Factoren etwas willkührliches ist, und daß überhaupt a ⋉ b so viel seyn muß als b ⋉ a.

§. 33.

Sollte nun eine zusammengesetzte Zahl durch eine einfache multipliciret werden, z. E. 43785 durch 9,

so würde dieses auf folgende Art geschehen können, ohne daß man nöthig hätte, die Zahl 43785 neunmal zu sich selbst zu addiren, welches schon eine zu weitläuftige Arbeit wäre, und in andern Fällen noch beschwerlicher seyn würde. Nemlich weil das Ganze und alle Theile zusammengenommen einander gleich sind (§. 10); so muß es einerley seyn, ob man die vorige Zahl auf einmal durch neun multiplicirt, oder ob man diese Vervielfältigung mit allen ihren Theilen nach und nach vornimmt. Man schreibt daher die beyden Zahlen unter einander, zieht einen Strich, und rechnet folgendergestalt:

43785
9

394065

Zuerst multiplicirt man die 5 Einer in 9. Dieses Product ist nach dem Einmaleins 45, nemlich Einer, d. i. 4 Zehner und 5 Einer. Die 5 Einer setzt man unter den Strich an die Stelle der Einer, und behält die vier Zehner in Gedanken, um sie zu der folgenden Classe zählen zu können. Hierauf multiplicirt man den zweyten Theil, acht Zehner durch neun. Das Product aus 8 in 9 ist nach dem Einmaleins zwey und siebenzig, und muß hier Zehner bedeuten, weil man eigentlich acht Zehner neunmal genommen hat. Zu diesen zwey und siebenzig Zehner setzt man die vorigen vier Zehner, wodurch sechs und siebenzig Zehner entstehen, d. i. sieben Hunderte und sechs Zehner. Nachdem man also diese sechs Zehner unter den Strich an den gehörigen Ort gesetzt, und die sieben Hunderte sich gemerkt hat, multiplicirt man die dritte Zifer der obern Zahl, nemlich die Sieben, welche Hunderte bedeutet. Sieben Hunderte neunmal genommen machen 63 Hunderte,

und

und mit den vorigen 7 Hunderten 70 Hunderte oder 7 Tausende, ohne einem Hunderter. An die Stelle der Hunderte kömmt also Null. Die vierte Zifer des Multiplicandi ist 3, welche Tausende bedeutet, und diese 9 mal genommen, machen 27 Tausende, wozu noch die vorigen sieben Tausende addirt werden müssen, wodurch vier und dreyßig Tausende, d. i. dreyzehn Tausende und vier Tausende entstehen. Die vier Tausende kommen also in die vierte Stelle des Productes, und die 3^{IV} werden im Sinne behalten. Vier Zehntausende neunmal genommen, machen sechs und dreyßig Zehntausende, und mit den vorigen dreyen neun und dreyßig Zehntausende, die also als die letzte Zahl des Products ganz ausgeschrieben werden. Da nun die Zahl 394065 das Neunfache von allen Theilen der gegebenen Zahl 43785 enthält, so muß sie nothwendig das Neunfache von der ganzen Zahl, das heißt, das Product aus 43785 in 9 seyn.

§. 34.

Sind beyde Factores zusammengesetzte Zahlen, so multiplicirt man jede Zifer des Multiplicandi mit jeder Zifer des Multiplicators, und schreibt die Producte so unter einander, daß die gleichartigen Theile, welche man hernach addiren muß, in einer Reihe zu stehen kommen. z. E. es sey die Zahl 25438 durch 643 zu multipliciren.

```
  25438
    643
  -------
  76314
 101752
152628
-------
16356634
```

Man wird leicht einsehen, wenn man sich an den vorhin angeführten Grundsatz (§. 10) erinnert,

daß man die Zahl 25438 durch 643 multipliciret, sobald man sie sechs hundert und vierzig und dreymal nimmt. Es gilt hier gleich viel, ob man mit den Hunderten oder mit den Einern anfängt; insgemein aber pflegt man das letzte zu thun. Multiplicirt man nun 25438 durch drey nach den vorhin erklärten Regeln, so erhält man 76314 Einer, welche man unter den gezogenen Strich setzet. Auf eben die Art multiplicirt man die obere Zahl mit der zweyten Zifer des Multiplicators, nemlich mit vier, wodurch die Zahl 101752 entstehet. Weil aber diese zweyte Zahl des Multiplicators Zehner bedeutet, und man also hier eigentlich vier Zehner 25438 mal genommen hat, so muß auch das Product 101752 Zehner bedeuten, daher diese Zeile nicht unmittelbar unter die vorige gesetzt werden kann, sondern um eine Stelle eingerückt werden muß. Endlich nimmt man die letzte Zifer des Multiplicators sechs, und verfährt damit wie vorhin, wodurch man das Product 152628 erhält, welches sich auf Hunderte beziehet, weil man hier eigentlich sechs Hunderte 25438 mal genommen hat, daher man es auch wieder unter die zweyte Zeile dergestalt schreibet, daß man die erste Zifer rechter Hand unter die Hunderte setzt. Die Summe aus diesen drey Zeilen 16356634 muß also nothwendig die Producte aus allen Theilen des Multiplicators in einen jeglichen Theil des Multiplicandi, und folglich das verlangte Product aus den beyden ganzen Zahlen in einander enthalten.

§. 35.

Wenn sich Nullen bey einem Factor befinden, so übergeht man sie anfänglich, weil man sonst einige Zeilen mit lauter Nullen, die in der Addition nichts

ändern

ändern würden, anfüllen müßte. Nur müssen die Producte an die gehörigen Stellen gesetzt, und wenn die Nullen rechter Hand bey einem Factor stehen, dem Producte wieder beygesetzt werden, damit die übrigen Zifern ihren gehörigen Ort erhalten. z. E.

54325	38264
6002	53000
108650	114792
325950	191320
326058650	2027992000

Befinden sich sowohl bey dem Multiplicando als auch bey dem Multiplicator Nullen, so multiplicirt man nur die eigentlichen Zahlen, und hängt an das Product alle Nullen der beyden Factoren. Den Grund davon wird man leicht aus dem vorhergehenden einsehen. E.

42350000
23000
12705
8470
97405000000

§. 36.

Ausser der jetzt erklärten Art, die Zahlen zu multipliciren, wobey man das pythagorische Täfelchen nöthig hat, giebt es noch andre Arten, die das Einmaleins entbehrlich machen, dergleichen z. E. die Ludolphische ist, welche das Product folgendergestalt finden lehret. Wir wollen setzen, daß 24318 durch 5234 multiplicirt werden sollte. Man mache sich also durch Hülfe der Addition, wie bey der Verfertigung des pythagorischen Täfelchens geschahe, das vielfache von dem Multiplicando 24318, indem man

nemlich das einfache zu sich selbst, um das 2fache, und dieses 2fache wieder zu dem einfachen addirt, um das 3fache zu erhalten, u. s. f. Im gegenwärtigen Falle, da die größte Zifer des Multiplicators 5 ist, hat man nicht nöthig, diese Addition bis zum neunfachen fortzusetzen, sondern kann bey dem fünffachen stehen bleiben. Man muß aber, um sich nicht zu irren, durch eine Zifer linker Hand bemerken, das wie vielfache des Multiplicandi jede Zeile vorstellt. Ist dieses nun geschehen, so besteht die ganze Multipllcation in einem blossen Abschreiben. Nemlich der erste Theil des Multiplicators rechter Hand ist in dem gegenwärtigen Exempel 4; man sucht also das vierfache von dem Multiplicando in der aufgesetzten Tabelle, 97272, und schreibt es unter den Strich. Der zweyte Theil des Multiplicators ist 3 und bedeutet Zehner; man sucht daher in der Tabelle das dreyfache des Multiplicandi, 72954, und setzt es, weil es auch Zehner bedeuten muß, in die andre Zeile eine Stelle weiter zur linken. Eben so verfährt man mit dem dritten und vierten Theile des Multiplicators, indem man das zweyfache und fünffache aus der Tabelle abschreibt, und jenes unter die Hunderte, dieses aber unter die Tausende setzet, weil die 2 Hunderte und die 5 Tausende bedeutet. Endlich werden, wie vorhin, diese einzelnen Producte zusammen addirt, wodurch man das ganze Product erhält, das eigentlich verlangt wurde.

	24318 der Multiplicandus.	24318
2)	48636 das 2fache desselben.	5234
3)	72954 das 3fache.	97272
4)	97272 das 4fache.	72954
5)	121590 das 5fache.	48636
		121590
		127280412

§. 37.

§. 37.

Die Multiplication der benannten Zahlen wird sich nunmehr ohne große Anweisung verstehen lassen. Wir wollen sie daher blos durch ein einziges Beyspiel erläutern. Es sey nemlich 238 Rthlr. 8 Gr. 4 Pf. durch 6 zu multipliciren. Dieses könnte nun auf zweyerley Art geschehen; erstlich, wenn man die 238 Rthlr. zu Groschen machte, und hierzu die 8 gr. addirte, ferner, diese Groschen wieder in Pfennige verwandelte, und hierzu die 4 pf. addirte, denn so dürfte man hernach diese Summe Pfennige nur 6 mal nehmen, so hätte man die ganze Zahl 238 Rthl. 8 gr. 4 pf. durch 6 multiplicirt. Allein jedermann wird die Weitläuftigkeit dieser Methode leicht einsehen; denn da man auf diese Art auch das Product in lauter Pfennigen erhielte, und man im gemeinen Leben eine so ansehnliche Summe Geld nicht in Pfennigen auszudrücken pflegt, so würde man diese Pfennige wieder in Groschen, und die Groschen in Thaler verwandeln müssen. Es ist also besser, wenn man sich einer andern Methode bedient, und jeglichen Theil des Multiplicandi einzeln durch den Multiplicator vervielfältiget. Nemlich in diesem Falle darf man nur erst 4 Pf. sechsmal nehmen, wodurch man 24 Pf. d. i. 2 Gr. ohne einen Pfennig erhält, alsdenn 8 Gr. sechsmal, welches 48 Gr. und mit den vorigen 2 Gr. 50 Gr. oder 2 Rthlr. 2 Gr. ausmacht. Die 2 Gr. setzt man also in die Stelle der Groschen, multiplicirt endlich 238 Rthlr. wieder durch 6, und addirt hierzu die vorigen 2 Rthlr. so erhält man das ganze Product. Man pflegt aber, wenn man einige Uebung hat, der Kürze wegen, den Multiplicator nur einmal zu schreiben, und die Zahlen,

welche zur folgenden Classe zu rechnen sind, im Sinne zu behalten, wie auch hier geschehen ist.

238 rthl. 8 gr. 4 pf. (6
1430 — 2 — 5 —

§. 38.

Die Division, mit welcher wir uns nunmehr beschäftigen wollen, wird zwar mit Recht eine wiederhohlte Subtraction genannt, wie schon aus der oben angeführten Erklärung §. 8. offenbar ist; wenn man aber bey größern Zahlen durch ein wiederhohltes Subtrahiren die Division verrichten wollte, so würde dieses eine sehr weitläuftige Arbeit seyn; daher man auf eine bequemere Art bedacht gewesen ist, den Quotienten zu entdecken. Nemlich die Zahlen, von welchen man den Quotienten wissen will, stehen entweder beyde in dem Einmaleins oder nicht. Ist das erste, so wird man durch dessen Hülfe den Quotienten leicht finden können. z. E. Es sey 30 durch 6 zu dividiren. Könnte ich mir 30 als ein Product von zwey Factoren vorstellen, wovon der Divisor der eine Factor wäre, so müßte der andre Factor der Quotient seyn. (§. 19.) Wenn ich nun den Dividendum 30 im pythagorischen Täfelchen §. 32. aufsuche, so finde ich, daß er aus der Multiplication der Zahl 6 in die Zahl 5 entstanden ist, und also muß 5 nothwendig der gesuchte Quotient seyn, denn $\frac{30}{6} = \frac{5 \times 6}{6} = 5$ (§. 19). Insgemein pflegt man den Quotienten durch Rathen zu suchen, und ihn auf diese Art zu prüfen, daß man ihn in den Divisor multiplicirt; denn gleicht dieses Product dem Dividendo, so hat man den wahren Quotienten getroffen. Ist z. E. 6 in 30 fünfmal enthalten, oder

läßt

läßt sich 6 aus 30 fünfmal wegnehmen, so muß die Zahl 6 fünfmal gesetzt die Zahl 30 ausmachen, und daher überhaupt ein Product aus dem Divisor und dem Quotienten so groß seyn, als der Dividendus.

§. 39.

Man kann sich die Division noch auf eine andre Art vorstellen, die in manchen Fällen ihren großen Nutzen hat, vornehmlich wenn eine kleinere Zahl durch eine größere dividirt werden soll. Man erwäge nur das vorige Beyspiel $\frac{30}{6} = 5$ und folglich

$30 = 5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

woraus man sieht, daß man den Quotienten 5 auch finden könnte, wenn man den Dividendum 30 in 6 gleiche Theile zergliederte, und einen solchen Theil nähme; daher kann man sagen: **Dividiren überhaupt heißt so viel, als eine von zwey gegebenen Zahlen in so viel gleiche Theile zergliedern, als die andre Einheiten hat, und einen solchen Theil nehmen.**

§. 40.

Bey der Division der größern Zahlen ist eben das zu beobachten, was bey den vorhergehenden Rechnungsarten mit zusammengesetzten Zahlen angeführt worden ist, nemlich, daß man ihre Theile nach und nach dividiret, anstatt das Ganze auf einmal zu dividiren. Wir wollen uns gleich die Sache in einem Beyspiele vorstellen, und die Zahl 20272 durch 8 dividiren, welches folgendergestalt geschehen könnte:

```
8) 20272 | 2534
   16    |
  ------ |
    42
    40
   ----
     27
     24
    ----
     32
     32
    ----
      0
```

Nemlich man ſetzt den Diviſor linker Hand, und ſondert ihn durch ein Häkchen vom Dividendo ab; rechter Hand ſchreibt man den Quotienten. Wenn man nun unterſucht, wie oft die Zahl 8 in jedem Theile der Zahl 20272 enthalten, ſo erfährt man dadurch, wie oft ſie in der ganzen Zahl enthalten iſt. Die Zahl 20272 beſteht aus 20 Tauſenden, 2 Hunderten, 7 Zehnern und 2 Einern. Man dividire alſo zuerſt den Theil 20 durch 8, wodurch man zum Quotienten 2 erhält, nämlich Tauſende, weil der Theil 20, Tauſende bedeutet, und man hier alſo den achten Theil von 20 Tauſenden nimmt. Dieſen gefundenen Quotienten multiplicirt man nunmehr durch den Diviſor, um ihn zu prüfen. Das Product iſt 16, woraus man ſehen kann, daß man nicht alle 20 Tauſende, ſondern nur eigentlich 16 davon dividirt habe; man zieht daher dieſe 16 von den 20 Tauſenden ab, um zu ſehen, wie viel noch nicht dividirt worden, und ſetzt zu den übrigen 4 Tauſenden die folgende Ziffer des Dividendi, nemlich 2 Hunderte, wodurch man zuſammen 42 Hunderte erhält. Dieſe 42 Hunderte dividirt man aufs neue durch 8, welches zum Quotienten 5 Hunderte giebt. Das Product aus 5 in 8 iſt 40, dieſes zieht man von den 42 Hunderten ab,

und

und ſetzt zu den übrig gebliebenen 2 Hunderten, die man noch nicht dividirt hat, den folgenden Theil, nemlich 7 Zehner. Dieſe 27 Zehner durch 8 dividirt geben 3 Zehner, welches die dritte Zifer des Quotienten iſt. Das Product aber 8 × 3 iſt 24, woraus man wieder ſieht, daß nicht alle 27 Zehner, ſondern nur 24 davon völlig dividirt worden ſind; dieſe 24 alſo von den 27 Zehnern ſubtrahirt, laſſen 3 undividirte Zehner, die man zu dem letzten Theile des Dividendi, nemlich den 2 Einern ſetzet, und endlich auch dieſe 32 Einer durch 8 dividirt, wodurch man den letzten Theil des Quotienten, nemlich 4 Einer erhält; und weil 8 mal 4 die Zahl 32 völlig ausmacht, ſo muß der ganze Quotient ſeyn: 2534. Will man die Probe machen, ſo multiplicire man ihn durch den Diviſor, und vergleiche das Product mit dem Dividendo (§. 38.)

2534
8
20272

§. 41.

Hätte man die Zahl 20273 durch 8 dividiren ſollen, ſo würde auch bey der Diviſion des letzten Theils, noch ein undividirter Einer übrig geblieben ſeyn; der völlige Quotient wäre alſo nicht blos 2534, ſondern noch über dieſes der 8te Theil von einem Einer, den man alſo zu dem vorigen Quotienten hinzuſetzen muß. z. E.

8) 20273 | 2534 1/8
16
42
40
27
24
33
32
1

Will man nun in diesem Falle den ganzen Quotienten prüfen, so muß zu dem Producte aus 2534 in 8 der Ueberrest 1 addirt werden.

2534
8
20273

§. 42.

Manche setzen den Divisor unter jeglichen Theil des Dividendi, den sie dividiren, behalten die Producte aus den Theilen des Quotienten in den Divisor im Sinne, und setzen die Ueberreste über den Dividendum. Die Verwirrung zu vermeiden, werden alsdenn diejenigen Zifern, die schon dividirt worden sind, ausgestrichen. Nach dieser Art würde voriges Exempel also gerechnet werden:

4 3(1
2ø27ʒ | 2534 1/8
8888

Andre hingegen schreiben den Divisor nur einmal hin, wie wir vorhin gethan haben, und setzen die Ueberreste unter die Theile des Dividendi. z. E.

8) 2ø27ʒ | 2534 1/8
4 3(1

Die-

Diese beyden Arten sind zwar kürzer, als diejenige, die §. 41. erklärt worden ist, allein da man nicht alle Zahlen ausschreibt, so kann man sich viel leichter verrechnen, und bey dem Durchsehen eines Exempels den Fehler auch nicht so bequem entdecken.

§. 43.

Wenn nicht nur der Dividendus, sondern auch der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, so bedient man sich folgender Muthmassung, um den Quotienten zu finden: vielleicht wird der ganze Divisor in dem ganzen Theile des Dividendi so oft stecken, als die erste Zifer des Divisors in der ersten oder in den ersten beyden Zifern der zu dividirenden Zahl. Diese Muthmassung trügt zwar bisweilen, allein diesen Irrthum kann man gar leicht verbessern, so bald man den gefundenen Quotienten in den Divisor multipliciret, und von dem dividirten Theile abziehet. Denn ist dieses Product grösser, als der dividirte Theil, so ist auch der Quotient zu groß angenommen; oder ist nach geschehener Subtraction dieses Products von dem dividirten Theile, der Ueberrest grösser, als der Divisor, so ist der Quotient zu klein, und muß geändert werden. Uebrigens geschieht die ganze Division auch in diesem Falle, wie vorhin, welches man aus folgendem Beyspiele sehen kann:

54) 23.3550 | 4325
216
175
162
13.5
108
270
270
0

Probe

4325
54
17300
21625
233550

Nemlich

Nemlich weil eine oder zwey Zifern des Dividendi zu klein sind, als daß man sie durch 54 dividiren könnte, so nimmt man gleich die ersten drey 233 auf einmal, und urtheilt also: vielleicht ist der ganze Divisor 54 in der Zahl 233 so oft enthalten, als 5 in 23. Nun steckt 5 in 23 ohngefehr 4 mal. Man setzt also 4 in die Stelle des Quotienten, multiplicirt diese Zahl in den Divisor 54 und zieht das Product 216 von 233 ab. Weil dieses Product kleiner als 233 und der Ueberrest 17 kleiner als der Divisor 54 ist, so muß 4 der wahre Quotient seyn. Zu dem Ueberrest 17 setzt man die folgende Zifer 5, und fährt auf eben die Art mit der Division so lange fort, bis man alle Theile des Quotienten gefunden hat.

§. 44.

Will man den Quotienten ohne Einmaleins und ohne Rathen finden, so mache man es mit dem Divisor, wie man es mit dem Multiplicando machet, (§. 36.) wenn man ohne Einmaleins multipliciret. Nemlich man suche durch Hülfe der Addition das zweyfache, dreyfache, vierfache, fünffache, sechsfache, siebenfache, achtfache, und neunfache des Divisors, und vergleiche diese vielfache desselben mit den einzelnen Theilen des Dividendi, so wird man den Quotienten mit leichter Mühe finden können. z. E. es sey 24572373 48 durch 4523 zu dividiren:

1) 4523)	24.57.237348	543276
2) 9046	22615	
3) 13569	195.73	
4) 18092	18092	
5) 22615	148.17	
6) 27138	13569	
7) 31661	1248.3	
8) 36184	9046	
9) 40707	34.374	
	31661	
	27138	
	27138	
	0	

Wenn man nun, wie hier geschehen ist, von dem Divisor 4523 durch die Addition das vielfache bis zu dem neunfachen gesucht hat, so nimmt man die ersten 5 Zifern des Dividendi, weil die erstern viere kleiner sind, als der Divisor, und vergleicht sie mit den vielfachen desselben. Das fünffache 22615 kömmt der Zahl 24572, die jetzt dividirt werden soll, am nächsten, man setzt also dieses fünffache unter dieselbe, und die Zahl 5 an die Stelle des Quotienten. Nachdem man nun zu dem Ueberreste 1957 die folgende Zifer 3 gesetzt hat, so vergleicht man aufs neue die jetzt zu dividirende Zahl 19573 mit den vielfachen des Divisors, dessen vierfaches nemlich 18092 ihr am nächsten kömmt. Der zweyte Theil des Quotienten ist also 4. Und auf diese Art fährt man so lange fort, bis man alle Theile des Quotienten entdeckt hat.

§. 45.

Sollen benannte Zahlen, z. E. 2453 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf. durch 32 dividirt werden, so kann man, wenn sie aus verschiednen Einheiten bestehen, alles auf einerley Einheit, als hier z. E. die Thaler

und Groſchen auf Pfennige reduciren, und alsdenn die Diviſion vornehmen, welches aber einige Weitläuftigkeit verurſacht, und nicht nöthig iſt, wofern nicht auch der Diviſor aus Zahlen von verſchiednen Einheiten beſteht. Kürzer kann man alſo das gegenwärtige Exempel rechnen, wenn man zuerſt die Thaler dividirt, und wofern bey der Diviſion einige Thaler übrig bleiben, dieſelben in Groſchen verwandelt, und die Groſchen des Dividendi hinzuſetzt, dieſe Summe Groſchen aufs neue dividirt, die übrig gebliebnen Groſchen zu Pfennigen macht, hierzu die Pfennige des Dividendi addirt, und alsdenn abermals die Diviſion verrichtet, wie man aus folgender Rechnung ſehen kann.

32) 2453 | Rthlr. 13 Gr. 4 Pf.
224 | 76 Rthlr.

213
192
---
21 Rthlr.
24

84
42
---
504 Gr.
13
---
32) 517 | 16 Gr.
32 |

197
192
---
5 Gr.
12
---
60 Pf.
4
---
32) 64 | 2 Pf.
64 |

0

Noch

Noch kürzer könnte man in diesem und in ähnlichen Fällen, wo sich der Divisor in einfache Factors zergliedern läßt, den Quotienten auf folgende Art finden. Die Zahl 32 kann als ein Product aus 8 in 4 angesehen werden. Mit 32 dividiren heißt so viel, als den 32ten Theil einer Zahl suchen. §. 39. Weil 8 mal 4 die Zahl 32 ausmacht, so muß es einerley seyn, ob man die zu dividirende Zahl gleich in 32 Theile theilet, und einen solchen Theil nimmt, oder ob man erst den 8ten und von dem 8ten hernach den 4ten Theil suchet. Der 4te Theil von dem 8ten Theile ist ohne Zweifel so groß als der 32te Theil. Man dividire also die gegebene Zahl zuerst durch 8, und diesen gefundenen Quotienten wieder durch 4, so erhält man den eigentlichen Quotienten, der verlangt wird. Weil man bey einer kleinen Uebung die Producte aus den einzelnen Theilen des Quotienten in den Divisor, wenn dieser eine einfache Zahl ist, leicht im Sinne behalten kann, so pflegt man nur gemeiniglich den Quotienten hinzuschreiben, und zwar gleich unter den Strich, auf folgende Art:

	2453 Rthlr.	13 Gr.	4 Pf.
8)	306 —	16 —	8 —
4)	76 Rthlr.	16 Gr.	2 Pf.

Nemlich der Quotient aus 2453 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf. dividirt durch 8 ist 306 Rthlr. 16 Gr. 8 Pf. und der Quotient aus 306 Rthlr. 16 Gr. 8. Pf. dividirt durch 4, 76 Rthlr. 16 Gr. 2 Pf. welches der 32te Theil von der obigen Zahl seyn muß.

Drittes Capitel.

Von den vier Rechnungsarten in gebrochenen Zahlen.

§. 46.

Wenn man einen deutlichen Begriff von einem Bruche haben will, so muß man zweyerley wissen; nemlich in wie viel gleiche Theile das Ganze oder die Einheit zergliedert worden, und wie viel solcher Theile der Bruch enthalte. Man pflegt daher die Brüche durch 2 Zahlen auszudrücken, und sie wie die Quotienten zu schreiben, weil hier allemal eine Theilung verstanden wird. Diejenige Zahl, welche die Eintheilung der Einheit anzeigt, wird der Nenner (denominator) genannt, und unter den Strich gesetzt, die andre aber, aus welcher man sieht, wie viel der Bruch Theile von der Einheit enthalte, heißt der Zähler des Bruchs, (numerator) und wird über den Strich gesetzt. Der Ausdruck $\frac{4}{5}$ d. i. vier Fünftel zeigt also an, daß man die Einheit in 5 gleiche Theile zergliedern, und vier solcher Theile nehmen soll, wodurch man eben so viel erhält, als wenn man die Zahl 4 durch die Zahl 5 dividirt. In diesem Falle wird der Zähler der Dividendus und der Nenner der Divisor. Es lassen sich aber die Brüche völlig als ganze Zahlen betrachten, wenn man nemlich nicht die ganze Einheit, sondern nur einen Theil derselben zur eigentlichen Einheit annimmt; denn so muß $\frac{4}{5}$ nothwendig die ganze Zahl 4 seyn, wenn man den fünften Theil der Einheit zur Einheit erwählet.

§. 47.

Man kann einen Theil der Einheit so vielmal nehmen, daß endlich eine Zahl daraus wird, welche eben so groß, oder noch größer ist, als die Einheit selbst. Brüche, welche auf diese Art entstanden sind, nennt man uneigentliche, unächte oder Bastard-Brüche (fractiones spurias) z. E. $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{10}{5}$, jene hingegen, welche weniger enthalten, als die Einheit, z. E. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, wahre oder ächte Brüche (fractiones veras): Ist der Zähler dem Nenner gleich, z. E. $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, so muß der Bruch die Einheit selbst vorstellen, und folglich müssen alle solche Brüche, deren Zähler und Nenner gleich sind, einander selbst gleichen, $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d}$ &c. Will man wissen, wie viel ganze Einheiten ein uneigentlicher Bruch enthält, so darf man nur den Zähler mit dem Nenner dividiren. Also ist $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$ ferner $\frac{10}{5} = 2$; woraus man zugleich sehen kann, daß sich jede ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch verwandeln läßt.

§. 48.

Weil der Zähler eines Bruchs eigentlich die Menge der Theile, und der Nenner blos die Eintheilung der Einheit anzeigt, (§. 46.) so ist klar, daß der Bruch mit der Vermehrung des Zählers wachsen, und hingegen mit der Verminderung desselben abnehmen muß, wofern man den Nenner unverändert läßt, weil man im ersten Falle mehr Theile und im andern Falle weniger Theile nimmt, ohne die Eintheilung der Einheit selbst zu ändern. So wird z. E. niemand daran zweifeln, daß der Bruch $\frac{8}{9}$ größer seyn muß,

als der Bruch $\frac{7}{9}$, weil der Zähler des erstern gröſſer ist, als der Zähler des andern, und beyde doch einerley Nenner haben. Hingegen wird sich die Sache ganz anders verhalten, wenn man mit dem Nenner eines Bruchs eine Veränderung vornimmt, und den Zähler unverändert läßt. Denn in diesem Falle muß nothwendig mit der Vermehrung des Nenners die Verminderung des Bruchs, und mit der Verminderung des Nenners die Vermehrung des Bruchs verbunden seyn, weil die Theile der Einheit desto kleiner werden, je grösser die Anzahl derselben gemacht wird. So muß z. E. der Bruch $\frac{5}{6}$ grösser seyn, als der Bruch $\frac{5}{12}$, weil der Nenner 6 kleiner ist als der Nenner 12; denn wird die Einheit nur in 6 gleiche Theile zergliedert, so müssen die Theile ohne Zweifel grösser seyn, als wenn dieselbe in 12 Theile getheilt wird. Hieraus folgt also, daß man einen Bruch auf zweyerley Art vermehren und vermindern könne; Nemlich er läßt sich vermehren, wenn man entweder den Zähler vermehrt, ohne den Nenner zu verändern, oder den Nenner vermindert, und den Zähler unverändert läßt. Und so läßt er sich vermindern, wenn man entweder den Zähler kleiner macht, und den Nenner behält, oder den Nenner vergröſsert und den Zähler unverändert läßt.

§. 49.

Wer das vorhergehende richtig verstanden hat, wird nunmehr ohne fernern Beweis einsehen, daß der Werth eines Bruchs keine Veränderung leidet, wenn man seinen Zähler und Nenner durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt; $\frac{3}{4}$ muß eben so viel seyn, als $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ d. i. $\frac{15}{20}$; denn indem ich den

Zäh-

Zähler durch 5 vermehre, so mache ich den Bruch 5 mal größer, und indem ich auch den Nenner durch 5 multiplicire, so mache ich ihn wieder fünfmal kleiner, und folglich müssen die beyden Veränderungen einander aufheben, und den Werth des Bruchs unverändert lassen. Aus eben der Ursache muß auch $\frac{8}{12}$ so viel seyn, als $\frac{8 : 4}{12 : 4}$ d. i. $\frac{2}{3}$, denn durch die Division des Zählers mit 4 wird jener Bruch 4 mal kleiner, und durch die Division des Nenners mit 4 wieder viermal größer, und folglich muß hier wieder durch die letzte Vermehrung die erste Verminderung aufgehoben werden.

§. 50.

Aus den jetzt angeführten Sätzen wird sich also die Art und Weise leicht einsehen lassen, Brüche von verschiednen Nennern in andre gleichgeltende zu verwandeln, die einerley Nenner haben, und ferner aus einem gegebenen Bruche einen andern von eben dem Werthe zu machen, dessen Zähler und Nenner kleiner sind. Was die erste Aufgabe betrift, Brüche von verschiedenen Namen unter einerley Benennung zu bringen, so multiplicire man, wenn nur zwey Brüche gegeben sind, den Zähler und Nenner eines jeden in den Nenner des andern, und wenn deren mehr gegeben sind, den Zähler und Nenner eines jeden durch ein Product aus den Nennern der übrigen Brüche. Z. E. verlangt man statt $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{8}$ zwey andre gleichgeltende Brüche von einerley Nenner, so multiplicire man Zähler und Nenner von $\frac{5}{9}$ durch 8 als den Nenner des andern Bruchs, und Zähler und Nenner von $\frac{7}{8}$ durch 9 als den Nenner des ersten Bruchs auf folgende Art:

$$\begin{array}{r|l} 5 & \overset{8}{\frown}40 \\ \hline 9 & 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & \overset{9}{\frown}56 \\ \hline 8 & 72 \end{array}$$

Der Bruch $\frac{40}{72}$ muß so groß seyn wie der Bruch $\frac{5}{9}$, und $\frac{56}{72}$ so groß als $\frac{7}{8}$. (§. 49.) Wären mehr als als zwey Brüche gegeben, z. E. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, so wäre die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \overset{30}{\frown}30 \\ \hline 4 & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & \overset{40}{\frown}80 \\ \hline 3 & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \overset{24}{\frown}96 \\ \hline 5 & 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & \overset{60}{\frown}60 \\ \hline 2 & 120 \end{array}$$

Nemlich 30, womit der Zähler und Nenner des ersten Bruchs multiplicirt wird, ist ein Product aus dem Nenner der 3 übrigen Brüche $3 \times 5 \times 2$; eben so $40 = 4 \times 5 \times 2$; $24 = 4 \times 3 \times 2$ und $60 = 4 \times 3 \times 5$.

§. 51.

Die andre Aufgabe, einen Bruch, dessen Zähler und Nenner grosse Zahlen sind, in einen andern gleichgeltenden Bruch mit kleinern Zahlen zu verwandeln, welches man aufheben nennt, wird dadurch aufgelöset, daß man eine Zahl sucht, womit sich der Zähler und Nenner völlig dividiren läßt. z. E. wäre der Bruch $\frac{48}{72}$ gegeben, so dividire man den Zähler und Nenner mit 24, weil sich beyde mit dieser Zahl völlig dividiren lassen, denn $\frac{48}{24} = 2$ und $\frac{72}{24} = 3$, der neue Bruch, welcher dadurch entstehet, nemlich $\frac{2}{3}$ muß so groß seyn als $\frac{48}{72}$. (§. 49.) Läßt sich keine Zahl entdecken, womit man den Zähler und Nenner, ohne Rest zu behalten, dividiren kann, so ist es besser, den Bruch unverändert zu lassen, weil man

man sonst einen unbequemen Ausdruck erhält. Denn wollte man z. E. den Bruch $\frac{17}{48}$ mit 8 aufheben, so würde man $\frac{2\frac{1}{8}}{6}$ erhalten, wo der Zähler selbst wieder zum Theil aus einem Bruche bestünde.

§. 52.

Wenn sich Zähler und Nenner nicht mit einfachen Zahlen aufheben lassen, so ist es nicht allemal leicht, die zusammengesetzte Zahl, womit dieses möglich ist, durch Versuchen zu finden. Man pflegt sich daher in dergleichen Fällen folgender Methode zu bedienen, die sich am besten durch ein Exempel wird vortragen lassen. Es sey der Bruch $\frac{533}{697}$ aufzuheben. Man dividire den Nenner 697 durch den Zähler 533; bleibt kein Rest, so läßt sich der Bruch durch den Zähler selbst aufheben. z. E.

533)697|1
533|
164

Da hier 164 übrig bleibt, so ist klar, daß sich der Bruch durch 533 nicht wird aufheben lassen. Man dividire also nunmehr den vorigen Divisor 533 durch den Ueberrest 164; geht die Division völlig auf, so wird 164 die Zahl seyn, welche zum Aufheben geschickt ist.

164)533|3
492|
41

Der Ueberrest 41 beweiset abermal, daß auch 164 die gesuchte Zahl nicht sey; laßt uns also dieselbe wieder durch diesen Ueberrest 41 dividiren.

41 | 164 | 4
164 |

0

Da nun hier die Division völlig aufgeht, so ist dieses ein Beweis, daß sich nicht nur 164, sondern auch die vorhergehenden Zahlen 533 und 697 durch 41 ohne Ueberrest werden dividiren lassen.

41
⌣
533 | 13
---
697 | 17

Wenn die Division niemals aufgeht, als bis man Eins übrig behält, so läßt sich daraus urtheilen, daß es keine Zahl giebt, mit welcher Zähler und Nenner dividirt werden könnte.

§. 53.

Bey der Addition und Subtraction der Brüche werden wir nicht nöthig haben, uns lange aufzuhalten. Wenn man erwägt, daß nur gleichartige Zahlen zu einander gesetzt, oder von einander abgezogen werden können, (§. 4.) so wird man leicht einsehen, daß sich nur eigentlich Brüche von einerley Namen unmittelbar addiren oder subtrahiren lassen, weil bey den Brüchen nicht die ganze Einheit, sondern nur ein Theil derselben als die eigentliche Einheit zu betrachten ist (§. 46.), und daher solche Brüche, die verschiedene Nenner haben, als ungleichartige Zahlen anzusehen sind, indem alsdenn ein jeder Bruch sich auf einen andern Theil der Einheit bezieht. Brüche also, die verschiedne Nenner haben, müssen sowohl bey der Addition, als auch bey der Subtraction, zu einerley Benennung gebracht werden. Ist dieses geschehen, so findet man ihre Summe, wenn man

blos

blos ihre Zähler addirt; und ihre Differenz, wenn man ihre Zähler von einander subtrahiret, ohne mit den Nennern die geringste Veränderung vorzunehmen, weil der Zähler allein die Menge der Theile, und der Nenner nur die Eintheilung der Einheit anzeigt. (§. 46.)

§. 54.

Die Summe von $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, würde sich also folgendergestalt finden lassen: Man verwandle zuerst diese drey Brüche in andre gleichgeltende von einerley Nennern, (§. 50.) so bekömmt man $\frac{48}{72}$, $\frac{60}{72}$, $\frac{54}{72}$, deren Summe $\frac{48 + 60 + 54}{72}$ d. i. $\frac{162}{72}$ oder $2\frac{18}{72}$ (§. 47.) oder $2\frac{1}{4}$ (§. 51.) seyn muß. Insgemein pflegt man diese Rechnung anders auszudrücken. Man schreibt die Brüche, welche addirt werden sollen, unter einander; macht ein Product aus allen ihren Nennern, welches man den Hauptnenner heißt, und oben an die Brüche setzt, weil man dessen bey der eigentlichen Addition nicht nöthig hat. Nun dividirt man diesen Hauptnenner durch den Nenner eines jeden Bruchs, und multiplicirt den Quotienten in den Zähler desselben, wodurch man den Zähler des neuen Bruchs erhält, der jenem gleich gilt, und zu seinem Nenner den Hauptnenner hat. Diese gefundne Zähler setzt man unter einander, und addirt sie. Ist die Summe grösser, als der Hauptnenner, so dividirt man sie damit, um die Ganzen zu erfahren, die darinnen enthalten sind (§. 47.). Nach dieser Art würde das vorige Exempel also geschrieben werden:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 72 \\
\hline
\frac{2}{3} & 48 \\
\frac{5}{6} & 60 \\
\frac{3}{4} & 54 \\
\hline
72)16.2 & 2\ \frac{18}{72} \\
144 & \\
\hline
18 &
\end{array}
$$

Nemlich 48 heißt so viel, als $\frac{48}{72} = \frac{2}{3}$. Der Zähler 48 wurde gefunden, indem man den Hauptnenner 72 durch den Nenner 3 des ersten Bruchs $\frac{2}{3}$ dividirte, und den Quottenten 24 durch den Zähler 2 wieder multiplicirte. Denn ist 24 der dritte Theil von 72, so muß $\frac{24}{72}$ so viel als $\frac{1}{3}$, und folglich zweymal so viel, oder $\frac{48}{72}$ so groß, als $\frac{2}{3}$ seyn, u. s. f.

§. 55.

Sollte man Brüche, z. E. $\frac{8}{9}$ und $\frac{2}{5}$ von einander subtrahiren, so wäre nichts weiter zu thun, als sie auf vorige Art zu einer Benennung zu bringen, ihre Zähler alsdenn von einander abzuziehen, und den gemeinschaftlichen Nenner zu behalten:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 45 \\
\hline
\frac{8}{9} & 40 \\
\frac{2}{5} & 18 \\
\hline
 & \frac{22}{45}
\end{array}
$$

Die

Die gesuchte Differenz muß also $\frac{22}{45}$ seyn; denn

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{40}{45} & = & \frac{8}{9} \\ \frac{18}{45} & = & \frac{2}{5} \end{array}\right\} \text{(§. 50.)}$$

$$\frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{8}{9} - \frac{2}{5} \quad \text{(§. 14.)}$$

$$\frac{40}{45} - \frac{18}{45} = \frac{22}{45} \quad \text{(§. 53.)}$$

$$\frac{8}{9} - \frac{2}{5} = \frac{22}{45} \quad \text{(§. 11.)}$$

Die Probe wird wie bey der Subtraction der ganzen Zahlen gemacht. Die Summe aus dem kleinern Bruche und der Differenz muß dem grössern Bruche gleich seyn.

§. 56.

Bey der Multiplication und Division der gebrochenen Zahlen, die für Anfänger gemeiniglich einige Schwierigkeit zu haben pflegen, wollen wir uns die verschiedenen Fälle, welche dabey vorkommen, besonders vorstellen, weil sich auf diese Art der Grund der Regeln am besten einsehen läßt. Nemlich erstlich bey der Multiplication ist entweder nur ein Factor eine gebrochne Zahl, oder alle beyde Factores. Ist nur ein Factor ein Bruch, so findet man das Product, wenn man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl, welche den andern Factor vorstellt, multipliciret, und den Nenner unverändert läßt. z. E. $\frac{3}{4} + 8$ oder $8 \times \frac{3}{4}$ ist so viel, als $3 \frac{\times 8}{4}$ d. i. $\frac{24}{4}$ oder 6 ganze. Der Grund davon ist dieser: Wenn $\frac{3}{4}$ durch 8 multipliciret werden soll, so muß man $\frac{3}{4}$ achtmal zu sich selbst addiren, (§. 6.) das würde also die Summe $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ d. i. einen Bruch geben, dessen Zähler eine

achte

achtfache 3, und dessen Nenner der Nenner des Multiplicandi wäre, und folglich könnte man das Product aus $\frac{3}{4}$ in 8 auf einmal finden, wenn man den Zähler 8 mal grösser machte, und den Nenner unverändert liesse. Ist aber der Multiplicandus eine ganze Zahl, und der Multiplicator ein Bruch, z. E. $8 \times \frac{3}{4}$, so muß man sich die Sache also vorstellen: Wenn eine Zahl durch eine andre multiplicirt werden soll, so wird verlangt, man soll die erstre so vielmal nehmen, als die andre Einheiten enthält (§. 6.). Ist nun diese andre Zahl, d. h. der Multiplicator ein wahrer Bruch, so muß sie kleiner seyn, als die Einheit, und folglich kann sie nicht die Einheit selbst, sondern nur einen Theil der Einheit etlichemal enthalten. Eine Zahl also durch einen wahren Bruch multipliciren, heißt, von der Zahl eben so viel Theile nehmen, als der Bruch von der Einheit enthält; und folglich würde man 8 durch $\frac{3}{4}$ multipliciren, wenn man 8 in 4 gleiche Theile zergliederte, und 3 solcher Theile nähme. Das erste könnte dadurch geschehen, wenn man 8 durch 4 dividirte (§. 39.), und das andre, wenn man diesen Quotienten durch 3 multiplicirte. Das Product $8 \times \frac{3}{4}$ wäre also $\frac{8}{4} \times 3$, d. i. $\frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$, woraus offenbar ist, daß auch in diesem Falle an der Ordnung der Factoren nichts gelegen ist, und daß man einerley Producte erhält, man mag den Bruch oder die ganze Zahl als den Multipticator betrachten. Ferner sieht man auch hieraus den Grund ein, warum durch die Multiplication einer Zahl mit einem wahren Bruche ein Product entsteht, welches kleiner ist, als der Multiplicandus. Denn die Multiplication mit einem wahren

ren Bruche ist nicht eine blosse Multiplication, sondern eine zusammengesetzte Rechnungsart, indem man mit dem Nenner dividirt, und nur mit dem Zähler multipliciret. Da nun bey den wahren Brüchen der Nenner grösser ist, als der Zähler, so wird allemal in dergleichen Fällen der Multiplicandus mehr vermindert als vermehrt, welches nothwendig eine kleinere Zahl zum Producte geben muß.

§. 57.

Ehe wir sehen, wie Brüche durch Brüche multiplicirt werden können, so wird es nöthig seyn, zuvor die Division der Brüche durch ganze Zahlen zu betrachten. Man kann aber Brüche durch ganze Zahlen auf zweyerley Art dividiren, nemlich entweder, wenn man den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl dividirt, und den Nenner unverändert läßt, oder wenn man den Nenner durch die ganze Zahl multiplicirt, und den Zähler behält. z. E. $\frac{6}{7} : 3$ ist so viel als $\frac{6:3}{7}$ d. i. $\frac{2}{7}$ oder $\frac{6}{7 \times 3}$ d. i. $\frac{6}{21}\Big|\frac{\overset{3}{\frown}}{\frac{2}{7}}$ Denn $\frac{6}{7}$ mit 3 dividiren, heißt den dritten Theil von $\frac{6}{7}$ suchen (§. 39.), welcher also nothwendig dreymal kleiner seyn muß, als $\frac{6}{7}$ selbst. Nun kann man einen Bruch sowohl durch die Verminderung des Zählers, als auch durch die Vermehrung des Nenners kleiner machen (§. 48.). Man muß daher einen dreymal kleinern Bruch als $\frac{6}{7}$, d. i. den Quotienten $\frac{6}{7} : 3$ erhalten, wenn man entweder den Zähler dreymal kleiner macht, d. h. durch 3 dividirt, und den Nenner behält, oder den Nenner dreymal grösser macht, d. h. durch 3 multiplicirt, und den Zähler unverändert läßt.

§. 58.

§. 58.

Nunmehr wird es keine Schwierigkeit haben, die Multiplication der Brüche durch Brüche einzusehen. Man multiplicirt sie, wenn man Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner multiplicirt. z. E. $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$ ist so viel, als $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ d. i. $\frac{15}{24}$. Denn vermöge dessen, was §. 56. erklärt worden ist, heißt $\frac{5}{6}$ durch $\frac{3}{4}$ multipliciren so viel, als $\frac{5}{6}$ durch 4 dividiren und durch 3 multipliciren. Wird nun $\frac{5}{6}$ durch 4 dividirt, so entsteht $\frac{5}{6 \times 4}$ (§. 57.), und wird $\frac{5}{6 \times 4}$ durch 3 multiplicirt, so erhält man $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ (§. 56.) d. i. einen Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler der beyden gegebenen Brüche, und dessen Nenner ein Product aus dem Nenner eben derselben Brüche ist.

§. 59.

Sollen Brüche durch Brüche dividirt werden, so haben diese Brüche entweder einerley Nenner oder nicht. Haben sie einerley Nenner, z. E. $\frac{12}{13} : \frac{4}{13}$, so muß der Divisor in dem Dividendo so oft stecken, als der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividendi, weil in diesem Falle von einerley Eintheilung der Einheit die Rede ist, und die Brüche $\frac{12}{13}$ und $\frac{4}{13}$ als die ganzen Zahlen 12 und 4 angesehen werden können, deren Einheit der 13te Theil von der ganzen Einheit ist (§. 46.), und also wird der Quotient $\frac{12}{13} : \frac{4}{13}$ so viel seyn, als $\frac{12}{4}$ d. i. 3, welches man auch aus der Probe sehen kann, weil $\frac{4}{13}$ multiplicirt durch 3 dem Dividendo $\frac{12}{13}$ gleich ist. Haben

die

die Brüche aber, die durch einander dividirt werden sollen, nicht einerley Nenner, so erhält man den Quotienten am geschwindesten, wenn man den Divisor umwendet, und alsdenn in den Dividendum multipliciret. z. E. $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$ ist so viel, als $\frac{7}{8} \times \frac{4}{3}$ d. i. $\frac{28}{24}$ oder $1\frac{4}{24} = 1\frac{1}{6}$. Denn wenn man die beyden Brüche zu einerley Benennung bringen wollte, so könnte man den Quotienten nach der vorigen Art erhalten, indem man blos die Zähler durch einander dividirte. Bringt man sie nun zu einerley Benennung, so erhält man statt $\frac{7}{8}$ den Bruch $\frac{7 \times 4}{8 \times 4}$ und statt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{3 \times 8}{4 \times 8}$. (§. 50.) Es muß also einerley seyn, ob man $\frac{7}{8}$ durch $\frac{3}{4}$ oder $\frac{7 \times 4}{8 \times 4}$ durch $\frac{3 \times 8}{4 \times 8}$ dividiret (§. 18.) Weil aber diese beyden Brüche einerley Nenner haben, so würde nach der vorigen Regel $\frac{7 \times 4}{3 \times 8}$ ihr Quotient seyn, den man also ohne diese Weitläuftigkeit erhalten kann, wenn man den umgewendeten Divisor in den Dividendum multipliciret.

§. 60.

Auf eben dieselbe Art verfährt man, wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch z. E. 6 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll. Der Bruch, als der Divisor, wird umgekehrt, und alsdenn in die ganze Zahl multipliciret. $6 : \frac{3}{4}$ muß eben so viel seyn, als $6 \times \frac{4}{3}$ d. i. $\frac{24}{3}$ oder 8. Denn die ganze Zahl 6 läßt sich durch einen uneigentlichen Bruch ausdrücken (§. 47.) und mit $\frac{3}{4}$ zu einerley Benennung bringen. $\frac{6 \times 4}{4}$ muß eben

so viel seyn als 6 (§. 19.) und folglich der Quotient $6 : \frac{3}{4}$ (§. 18.) so groß als der Quotient $\frac{6 \times 4}{4} : \frac{3}{4}$ d. i. nach (§. 59.) weil beyde Brüche einerley Nenner haben $\frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

§. 61.

Wenn vermischte Zahlen durch einander dividirt werden sollen, z. E. $6\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$, so muß man beyde in uneigentliche Brüche verwandeln, und hernach die Division nach den vorigen Regeln anstellen. $6\frac{2}{3}$ ist so viel als $\frac{20}{3}$ und $4\frac{1}{5}$ so viel als $\frac{21}{5}$, folglich $6\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5} = \frac{20}{3} : \frac{21}{5}$ (§. 18.) d. i. $\frac{20}{3} \times \frac{5}{21}$ (§. 59.) oder $\frac{100}{63}$ (§. 58.) oder $1\frac{37}{63}$ (§ 47.) Hieraus wird man auch ohne fernere Anweisung einsehen, wie man vermischte Zahlen durch einander multipliciren könne.

§. 62.

Diejenigen Brüche, deren Nenner 10 oder ein Product aus 10 in 10, z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, u. s. f. ist, verschaffen im Rechnen eine besondre Bequemlichkeit, weil sie nach eben dem Gesetz wachsen und abnehmen, wie die ganzen Zahlen, wofern man unsre gewöhnliche Art bis auf 10 zu zählen annimmt. Man heißt sie daher **Decimal-Brüche**, und schreibt sie gemeiniglich so, daß man ihre Nenner wegläßt, und den Zählern den Werth aus der Stelle giebt. In der ersten Stelle, von der linken gegen die rechte Hand zu gerechnet, stehen die Zehntheile, in der zweyten die Hunderttheile, in der dritten die Tausendtheile u. s. f. daß nemlich wie bey den ganzen Zahlen eine Stelle weiter zur Rechten 10mal we-

weniger bedeutet, als die vorhergehende Stelle. Sind die Brüche mit ganzen Zahlen verbunden, so werden sie durch ein Comma von einander abgesondert. Befinden sich aber keine ganzen Zahlen bey den Brüchen, so muß die Stelle der ganzen mit Null angefüllt und das Comma nicht vergessen werden, weil man sonst nicht sehen könnte, ob die Zifern ganze Zahlen oder Brüche bedeuten sollten. Folgende vermischte Zahl $7 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000}$ würde man daher also schreiben 7, 378; hingegen folgende Brüche ohne Ganze $\frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ auf diese Art: 0, 923. Fehlt irgendwo eine Classe, so muß man sie durch eine Null ausfüllen, damit die übrigen ihre eigentliche Stelle erhalten. Z. E. $12 + \frac{6}{100} + \frac{7}{10000}$ muß folgendergestalt ausgedrückt werden: 12, 0607.

§. 63.

Man kann aber die geschriebenen Decimal-Brüche auf zweyerley Art lesen, nemlich entweder, wenn man jede Zifer als einen besondern Bruch ansieht, und den dazu gehörigen Nenner ausspricht, oder wenn man alle Zifern als den Zähler eines einzigen Bruchs betrachtet, dessen Nenner der Nenner von der letzten Zifer rechter Hand seyn muß. Z. E. 0, 243 kann man aussprechen $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{100}$ und $\frac{3}{1000}$ oder $\frac{243}{1000}$. Denn

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{2}{10} & = & \frac{200}{1000} \\ \frac{4}{100} & = & \frac{40}{1000} \\ \frac{3}{1000} & = & \frac{3}{1000} \end{array}\right\} \text{(§. 49.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} \text{ (§. 13)}$$

$$\frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 53.)}$$

$$\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{243}{1000} \text{ (§. 11.)}$$

§. 64.

Weil $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ und $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ und $\frac{10}{10} = 1$ (§. 49. 51.) so ist klar, daß man Decimalbrüche wie ganze Zahlen addiren kann, wenn man sie nur dergestalt schreibet, daß Brüche von einerley Nenner untereinander kommen. Z. E.

15, 3578
2, 8371
0, 4291
0, 0065
18, 6305

Das Comma, welches die Brüche von den ganzen Zahlen unterscheidet, muß bey der Summe an eben dem Orte stehen, wo es bey den zu addirenden Zahlen steht, weil die Summe aus Hunderttheilen, auch nothwendig Hunderttheile, die Summe aus Zehntheilen wieder Zehntheile u. s. w. bedeuten muß. (§. 53.)

§. 65.

§. 65.

Eben dieſes gilt auch von der Subtraction, denn eine geborgte Einheit in einer Claſſe weiter zur linken muß bey den Decimalbrüchen, eben ſo wie bey den ganzen Zahlen, in der vorhergehenden Stelle rechter Hand zehnmal mehr bedeuten. Man hat alſo hier weiter nichts zu beobachten, als was bey der Subtraction der ganzen Zahlen gelehrt worden iſt; das Comma bey der Differenz wird an eben den Ort geſetzt, wo es bey den gegebenen Zahlen ſtehet; weil man eigentlich nur die Zähler ſubtrahirt und die Nenner unverändert läßt. (§. 55.) z. E.

12, 2 3 4
5, 8 5 6
6, 3 7 8

§. 66.

Auch die Multiplication und Diviſion der Decimalbrüche iſt von der Multiplication und Diviſion der ganzen Zahlen nicht unterſchieden, nur daß man hier eher, als bey der Addition und Subtraction, das Comma an einen unrechten Ort ſetzen kann, wenn beyde gegebene Zahlen Decimalbrüche ſind, welches einen anſehnlichen Fehler verurſacht. Man merke daher folgende Regel. Das Product enthält ſo viel Decimalſtellen, als in beyden Factoren zuſammengenommen ſind, und die Anzahl der Decimalſtellen des Quotienten bekömmt man, wenn man die Anzahl der Decimalſtellen des Diviſors von der Zahl der Decimalſtellen des Dividendi abzieht. z. E. es ſey 8, 257 durch 3, 43 zu multipliciren, ſo verfährt man damit, wie mit ganzen Zahlen.

```
   8, 257
      3,43
  ---------
     24 771
   330 28
  2477 1
 ---------
  28,32 151
```

Weil aber im Multiplicando 3 Zifern und im Multiplicator 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten, so muß man in dem Producte 5 Zifern von der Rechten gegen die Linke zu, für die Decimalbrüche abschneiden, und das Comma daher gleich nach 28 setzen. Denn da bey der Multiplication nicht wie bey der Addition und Subtraction die Nenner unverändert bleiben, sondern in einander multiplicirt werden, (§. 58.) so wird man leicht einsehen, daß Tausendtheile in Hunderttheile multiplicirt, zum Producte Hunderttausendtheile geben müssen. Man darf auch nur die Decimalbrüche wie andre Brüche schreiben, so wird man sich leicht von der Richtigkeit der vorigen Regel überzeugen können. Z. E.

$$8,257 = \frac{8257}{1000}$$

$$3,43 = \frac{343}{100}$$

$$8,257 \times 3,43 = \frac{8257}{1000} \times \frac{343}{100} \quad (\S.\ 17.)$$

$$\frac{8257}{1000} \times \frac{343}{100} = \frac{2832151}{100000} \quad (\S.\ 58.)$$

$$8,257 \times 3,43 = \frac{2832151}{100000} = 28,32151. \quad (\S.63.)$$

§. 67.

§. 67.

Wenn man ein Product, das aus der Multiplication zweyer Zahlen entstanden ist, durch den einen Factor dividirt, so muß man den andern Factor zum Quotienten erhalten (§. 19.) folglich ist der Quotient

$$\frac{28,\ 32151}{3,\ 43} = 8,\ 257$$

$$\text{und } \frac{28,\ 32151}{8,\ 257} = 3,\ 43$$

woraus man sieht, daß, wenn im Dividendo 5 Ziffern und im Divisor 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten, der Quotient 3 Decimalstellen enthalte; wenn aber im Dividendo 5 und im Divisor 3 Decimalstellen sich befinden, im Quotienten nur 2 Zifern Decimalbrüche bedeuten können, und daß man also die Anzahl der Decimalstellen im Quotienten bekomme, wenn man die Decimalstellen im Divisor und Dividendo zählet, und die Anzahl der erstern von der Anzahl der andern abziehet. Befinden sich im Dividendo weniger Decimalstellen als im Divisor, so setze man an den Dividendum rechter Hand so viel Nullen, bis man wenigstens eben so viel Decimalstellen bekömmt, als im Divisor befindlich sind. Z. E. es sey 34, 6 durch 4, 325 zu dividiren. Weil im Dividendo nur eine Zifer, im Divisor aber 3 Zifern Brüche bedeuten, so setze man zu dem erstern rechter Hand 2 Nullen, wodurch der Werth dieser Zahl ganz und gar nicht geändert werden kann, und dividire also statt 34, 6 die ihr gleichgeltende Zahl 34, 600

4, 325) 34, 600|8
34, 600|
0

Hier enthält also der Divisor und auch der Dividendus drey Decimalstellen. Drey von Drey subtrahirt läßt 0. Der Quotient also kann hier keine Decimalstelle haben, und folglich muß die Zahl 8, Ganze bedeuten. Wäre aber ein Rest geblieben, so hätte man an den Dividendum noch eine oder mehrere Nullen hängen können, wodurch man im Quotienten eben so viel Decimalbrüche würde erhalten haben.

Viertes Capitel.

Von den Quadrat- und Cubik-Zahlen.

§. 68.

Ein Product, das aus lauter gleichen Factoren besteht, nennt man eine **Dignität** oder **Potenz** von einem solchen Factor, der in Ansehung der Dignität den Namen der **Wurzel** erhält. So ist 8 × 8 d. i. 64 eine Potenz von 8, und 8 hingegen die Wurzel von 64. Man unterscheidet aber die Dignitäten nach der Anzahl der Factoren, die sich bey einem solchen Producte befinden, und nennt daher ein Product, das aus zwey gleichen Factoren besteht, die **zweyte Dignität**, ein Product von drey gleichen Factoren, die **dritte Dignität**, u. s. f. Die Zahl, wodurch man anzeigt, von welcher Dignität die Rede ist, heißt der **Exponent** (*exponens dignita-*

gnitatis) und wird oben rechter Hand an die Wurzel geschrieben. So bedeutet der Ausdruck 5^4 nichts anders, als die vierte Dignität von 5. d. i. das Product $5 \times 5 \times 5 \times 5$, oder die Zahl 625. Die zweyte Dignität, welche also entsteht, wenn eine Zahl in sich selbst multiplicirt wird, nennt man auch **Quadrat-Zahl**, und ihre Wurzel **Quadrat-Wurzel**; die dritte Dignität **Cubik-Zahl**, und ihre Wurzel **Cubik-Wurzel**; mit welchen beyden wir uns nur allein beschäftigen werden. Das Wurzelzeichen ist $\sqrt{}$, in welches der Exponent gesetzt wird, wenn von einer andern Dignität, als der zweyten die Rede ist. Also bedeutet $\sqrt[3]{27}$ die Wurzel der dritten Dignität, oder die Cubik-Wurzel aus 27 d. i. 3, hingegen $\sqrt{81}$ die Wurzel der zweyten Dignität, oder die Quadratwurzel, d. i. 9.

§. 69.

Die Quadratzahlen, Cubikzahlen und Dignitäten überhaupt werden **vollkommen** genannt, wenn sich die Wurzel genau angeben läßt, **unvollkommen** hingegen, wo die Wurzel nicht nach der größten Schärfe bestimmt werden kann. So ist z. E. 16 eine vollkommne Quadratzahl, denn die Wurzel ist 4; hingegen 17 eine unvollkommne Quadratzahl, denn die Wurzel ist grösser als 4, aber kleiner als 5, und der Bruch, um welches sie grösser als 4 ist, läßt sich niemals nach der größten Schärfe bestimmen. Die Wurzel aus den vollkommenen Dignitäten nennt man **rational**, weil sie sich völlig ausrechnen lassen, und die Wurzeln aus den unvollkommenen **irrational**, weil sie niemals ganz genau ausgerechnet werden können. Man benennt auch die Wurzeln von der An-

zahl der Theile, aus denen sie bestehen, und heissen daher solche, die nur eine Zifer haben, **monomische oder eintheilichte**; die aus zwey Zifern bestehen, **binomische oder zweytheilichte**; und diejenigen, die mehr als zwey Zifern haben, **polynomische oder vieltheilichte Wurzeln**. So ist 7 eine monomische, 39 eine binomische, und 438 eine polynomische Wurzel.

§. 70.

Wird uns eine Zahl gegeben, und von derselben das Quadrat verlangt, so hat man nichts weiter zu thun, als die gegebene Zahl in sich selbst zu multipliciren, wie ein jeder schon von selbst aus der Erklärung einer Quadratzahl einsehen wird. Wir wollen daher das Quadrat von einer binomischen Wurzel suchen, z. E. von 75 und die einzelnen Producte alle ausschreiben, um daraus einen Lehrsatz herzuleiten, der uns zur Ausziehung der Quadratwurzeln den Weg bahnen wird.

				auf die gewöhnliche Art
75				75
75				75
25	=	5°	$\times 5^{\circ}$	375
35	=	$5 \times 7'$		525
35	=	$7' \times 5$		5625
49	=	$7' \times 7'$		

$$75^2 = 5625 = 7 \times 7 + 2 \times 7 \times 5 + 5 \times 5$$

Hieraus sieht man also, daß die Quadratzahl von 75, aus der Quadratzahl von 7, aus dem Producte 7×5 zweymal genommen, und aus der Quadratzahl von 5 zusammengesetzt ist. Wir wollen diejenige Zifer, welche Zehner bedeutet, nemlich 7, den ersten, und die

die andre Ziser, nemlich 5, welche sich auf Einer bezieht, den andern Theil nennen, so läßt sich aus diesem Beyspiele dieser allgemeine Lehrsatz herleiten, das **Quadrat einer binomischen Wurzel besteht aus dem Quadrate des ersten Theils, aus dem zweyfachen Producte der beyden Theile in einander, und aus dem Quadrate des andern Theils.** Da wir denjenigen Theil, welcher Zehner enthält, den ersten genannt haben, so muß nothwendig das Quadrat desselben Hunderte bedeuten, weil es aus der Multiplication der Zehner in Zehner entstanden ist, das zweyfache Product aus den beyden Theilen in einander Zehner, denn hier wurden Zehner in Einer multiplicirt, und das Quadrat des andern Theils blosse Einer, weil hier nur Einer durch Einer multiplicirt wurden. Man pflegt insgemein, um diesen Satz durch Zeichen kurz auszudrücken, den ersten Theil der Wurzel a und den andern b zu nennen, so daß $a + b$ jede mögliche binomische Quadratwurzel bedeutet. Multiplicirt man nun $a + b$ in sich selbst, so erhält man einen Ausdruck, der alle mögliche Quadratzahlen binomischer Wurzeln vorstellen kann.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a + b^2) \end{array}$$

Soll a Zehner und b Einer bedeuten, so wird a^2 Hunderte, 2 ab Zehner, und b^2 Einer bedeuten müssen.

§. 71.

Wenn man von einer Reihe Zahlen, wovon die folgende zehnmal grösser ist, als die vorhergehende, die

die Quadratzahlen formiret, so wird man finden, daß in diesem Falle das folgende Quadrat allemal 100 mal grösser ist, als das vorhergehende, und daß also die Wurzel nur um eine Zifer vermehrt wird, wenn das Quadrat um 2 Zifern zunimmt. z. E.

$$1^2 = 1$$
$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10000$$
$$1000^2 = 1000000$$
$$10000^2 = 100000000$$

Aus dieser Ursache pflegt man die Quadratzahlen, wenn man die Wurzel ausziehen will, in Classen zu theilen, und jeder Classe zwey Zifern zu geben, damit man aus der Zahl dieser Classen sehen könne, wie viel einzelne Theile die Wurzel enthalte.

§. 72.

Nun wollen wir kürzlich sehen, auf was für Art sich die Wurzeln aus den gegebenen Quadratzahlen entdecken lassen. Die eintheiligten Wurzeln aus vollkommnen Quadratzahlen sind leicht zu finden, wenn man sich aus dem Einmaleins folgendes Täfelchen abschreibt, worinnen die Producte aller einfachen Zahlen in sich selbst, und folglich ihre Quadrate enthalten sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ist nun die gegebene Zahl eine vollkommne Quadratzahl, und zwar einer eintheilichten Wurzel, so muß sie in der zweyten Reihe und die Wurzel darüber stehen.

stehen. Auf diese Art sieht man, daß 8 die Wurzel aus 64, und 7 die Wurzel aus 49 ist.

§. 73.

Ist die Wurzel aus der gegebenen Zahl aber zweytheilicht, welches man daraus sehen kann, wenn sich die gegebene Zahl in zwey Classen zergliedern läßt, (§. 71.) so kann man sie folgendergestalt finden: Es sey z. E. die Wurzel aus 5625 zu suchen:

	56	25 | 75
$a^2 =$	49	
	7	$25 = 2ab + b^2$
	(14)	
$2ab =$	70	
$b^2 =$	25	
	725	
	0	

Weil das Quadrat des ersten Theils in diesem Falle Hunderte bedeutet (§. 70.), so muß es nothwendig unter den Hunderten, d. i. in der ersten Classe zur linken, wo die Hunderte stehen, enthalten seyn. Man suche daher 56 in dem Quadrattäfelchen (§. 72.) und nehme das nächst kleinere Quadrat, wofern man diese Zahl selbst darinnen nicht antrift. Dieses nächst kleinere Quadrat ist hier 49, welches also a^2 oder das Quadrat des ersten Theils seyn muß. Die Wurzel von 49 ist 7, und folglich a oder der erste Theil selbst, welchen man rechter Hand hinter einen Strich zu schreiben pflegt. Nunmehr zieht man das Quadrat des ersten Theils ab, und setzt hierzu die folgende Classe, so muß in den Zifern 720 noch das zweyfache Product des ersten Theils in den andern, und das Quadrat des andern Theils, oder nach unsern

Buch-

Buchstaben $2a \times b + b^2$ enthalten seyn. Wird $2a \times b$ durch $2a$ dividirt, so ist der Quotient b (§. 19.). Man nehme also den gefundenen ersten Theil, nemlich 7 zweymal, und dividire damit die 72 Zehner, weil das Product $2a \times b$ in den Zehnern stecken muß (§. 70.). Der Quotient $\frac{72}{14}$ ist 5, welches der andre Theil der Wurzel seyn muß, der Einer bedeutet, daher man ihn neben den ersten, welcher sich auf Zehner bezieht, rechter Hand setzet. Nachdem man nun die Wurzel gefunden, so ist es noch nöthig, die Producte $2a \times b$ und b^2 zu formiren, und sie von 725 abzuziehen, damit man sehen könne, ob man nicht eine zu grosse Zahl genommen habe, und ob die gegebene Quadratzahl eine vollkommne sey, oder nicht. Man multiplicirt daher den zweyten Theil 5 in den Divisor 14, so bekömmt man das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern, weil der Divisor schon den ersten Theil zweymal enthält. Man setzt dasselbe unter die Zehner, weil es Zehner bedeutet, und addirt hierzu noch das Quadrat von 5 als dem andern Theile, welches blosse Einer enthält, und daher eine Stelle weiter rechter Hand gerückt wird. Die Summe 725 muß also $2a \times b + b^2$ enthalten, und folglich kann nichts übrig bleiben, wenn sie von der obigen Zahl 725, die ebenfalls aus den Theilen $2a \times b + b^2$ zusammengesetzt ist, subtrahirt wird. Will man sich noch mehr überzeugen, ob man die wahre Wurzel gefunden, oder nicht, so multiplicirt man dieselbe in sich selbst. Das Product muß so groß seyn, als die gegebene Quadratzahl. z. E.

75
75
375
525
5625

§. 74.

Wenn man das bisherige verstanden, und sich dadurch in Stand gesetzt hat, eine binomische Wurzel finden zu können, so wird man auch ohne Schwierigkeit einsehen, wie es möglich sey, eine polynomische Wurzel aus einer gegebenen Quadratzahl zu entdecken. Denn da bey den Zahlen die Menge der Theile von unsrer Willkühr abhängt, so ist klar, daß sich eine vieltheilichte Wurzel auch als eine zweytheilichte betrachten läßt. Diese Vorstellung hat den Nutzen, daß man aus den vorigen Regeln, die eine binomische Wurzel finden lehren, eine allgemeine Regel für alle vieltheilichte Wurzeln herleiten kann. Wir wollen zu einem Beyspiele die Zahl 435 wählen, und sie als die Wurzel von einer zu suchenden Quadratzahl betrachten. Wollen wir jede Zifer als einen besondern Theil ansehen, so ist offenbar, daß die Wurzel drey Theile hat. Wir können aber auch die Hunderte und Zehner zusammen genommen als einen, und die Einer als den andern Theil ansehen, so wird sie nur aus zwey Theilen, nemlich aus 43 Zehnern und 5 Einern bestehen. Das Quadrat von 435 muß daher so groß seyn, als das Quadrat von der Summe $43' + 5°$. Nun besteht aber das Quadrat von $43' + 5°$ nach §. 70. aus $43^2 + 2 \times 43 \times 5 + 5^2$, wo nichts als die Bestimmungen der Einheiten weggelassen sind, die hernach hinzugesetzt werden sollen. Wenn man nun erwägt, daß $43'$ eben so viel sind,

als

als $4'' + 3'$ und folglich das Quadrat von $43'$ so viel, als das Quadrat der Summe aus $4'' + 3'$, welches (§. 70.) aus dem Quadrate von $4''$, dem 2fachen Producte aus $4''$ in $3'$ und dem Quadrate von $3'$ bestehen muß. Wenn man ferner überlegt, daß die Quadratzahl von Hunderten nothwendig Zehntausende bedeute, weil 100 in 100 multiplicirt 10000 macht, daß ein Product aus Hunderten in Zehnern, Tausende, und ein Quadrat von Zehnern Hunderte geben muß, so wird man folgende Schlüsse leicht einsehen, welche durch die oben erklärten Zeichen ausgedrückt sind:

$$\frac{435 = 43' + 5^{\circ} \quad (\S.\ 10.)}{435^2 = *(43' + 5^{\circ})^2}$$

$$(43' + 5^{\circ})^2 = \overset{II}{43^2} + 2 \times 43' \times 5^{\circ} + \overset{\bullet}{5^2} \quad (\S.70.)$$

$$435^2 = \overset{II}{43^2} + 2 \times 43' \times 5^{\circ} + \overset{\circ}{5^2} \quad (\S.\ 11.)$$

$$43' = 4'' + 3' \quad (\S.\ 10.)$$

$$435^2 = (4'' + 3')^2 + 2 \times 43' \times 5 + \overset{\circ}{5^2} \quad (\S.\ 9.)$$

$$(4'' + 3')^2 = \overset{IV}{4^2} + 2 \times \overset{III}{4} \times 3 + \overset{II}{3^2} \quad (\S.70.)$$

$$435^2 = \overset{IV}{4^2} + 2 \times \overset{III}{4} \times 3 + \overset{II}{3^2} + 2 \times \overset{I}{43} \times 5 + \overset{\circ}{5^2} \quad (\S.\ 9.)$$

Die Quadratzahl der dreytheilichten Wurzel 435 enthält

* Die Parenthesen bey $4'' + 3'$ haben diese Bedeutung, daß man ein Quadrat von der ganzen Summe, die aus den beyden Zifern $4''$ und $3'$ entsteht, und nicht blos von einer einzigen Zifer verlangt. Wären die Parenthesen weggelassen, und $4 + 3^2$ gesetzt, so zeigte dieses nur an, daß man von der letzten Zifer 3 allein das Quadrat begehre.

hält also, wenn wir 4″ den ersten, 3″ den andern, und 5° den dritten Theil nennen, das Quadrat des ersten Theils, ein zweyfaches Product aus dem ersten Theile in den andern, ein Quadrat des andern Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten, und ein Quadrat des dritten Theils, und zwar bezieht sich das Quadrat des ersten Theils auf Zehntausende, das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern auf Tausende, das Quadrat des andern Theils auf Hunderte, das zweyfache Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten auf Zehner, und das Quadrat des dritten Theils auf Einer, wenn der erste Theil Hunderte, der andre Zehner und der dritte Einer bedeutet. Anfänger können sich von diesem Satze auch noch folgendergestalt durch die Erfahrung überzeugen.

$$
\begin{array}{rrr}
 & & 435 \\
 & & 435 \\
\hline
 & & 2175 \\
 & & 1305 \\
 & & 1740 \\
\hline
 & & 189225
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
4^{2} & = & 160000 \\
2 \times 4 \times 3 & = & 24000 \\
3^{2} & = & 900 \\
2 \times 43 \times 5 & = & 4300 \\
5^{2} & = & 25 \\
\hline
 & & 189225
\end{array}
$$

Aus dieser Rechnung ersieht man, daß die vorhin erzählten Stücke wirklich das ganze Quadrat von 435 ausmachen. Will man sich den vorigen Satz in seiner Allgemeinheit vorstellen, so benenne man die einzelnen Theile einer dreytheilichten Wurzel mit den Buch-

ſtaben a, b, c, und die Summe der erſten beyden, nemlich a + b mit dem einzigen Buchſtaben S, ſo wird man die vorigen Schlüſſe auf ſie leicht anwenden können. Nemlich

$$a + b = S$$

$$a + b + c = S + c \quad (\S.\ 13.)$$

$$(a + b + c)^2 = (S + c)^2 \quad (\S.\ 17.)$$

$$(S + c)^2 = S^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c)^2 = S^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 11.)$$

$$S^2 = (a + b)^2$$

$$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 9.)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2Sc + c^2 \quad (\S.\ 9.)$$

oder

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$

§. 75.

Auf eben die Art kann man leicht finden, aus was für Theilen die Quadratzahl einer viertheilichten Wurzel beſtehe. Wir wollen die Sache gleich allgemein betrachten, und daher die vier Theile einer ſolchen Wurzel durch die Buchſtaben a, b, c, d ausdrücken. Die Summe aus den erſten dreyen, nemlich a + b + c heißt S, ſo iſt klar

$$a + b + c = S$$

$$a + b + c + d = S + d \quad (\S.\ 13.)$$

$$(a + b + c + d)^2 = (S + d)^2 \quad (\S.\ 17.)$$

$$(S + d)^2 = S^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 70.)$$

$$(a + b + c + d)^2 = S^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 11.)$$

$$S^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 \quad (\S.\ 74.)$$

$$(a + b + c + d)^2 =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2Sd + d^2 \quad (\S.\ 9.)$$

oder

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$

Dieſe

Diese letztere Zeile würde, wenn man sie mit Worten ausdrücken wollte, folgendergestalt lauten. Das Quadrat einer viertheilichten Wurzel enthält das Quadrat des ersten Theils ein zweyfaches Product aus dem ersten Theile in den andern, das Quadrat des andern Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten beyden Theile in den dritten, das Quadrat des dritten Theils, ein zweyfaches Product aus der Summe der ersten drey Theile in den vierten Theil und das Quadrat des vierten Theils. Wollte man wissen, aus was für Theilen das Quadrat einer fünftheilichten Wurzel bestehe, so dürfte man nur eine solche Wurzel auf die vorige Art sich als eine zweytheilichte vorstellen. Man würde immer finden, daß die Quadratzahl einer jeden polynomischen Wurzel aus dem Quadrate eines jeden Theiles und einem doppelten Producte aller Theile in einander bestehe.

§. 76.

Aus den bisherigen Betrachtungen wird sich nun leicht einsehen lassen, daß eine vieltheilichte Wurzel eben so gut, als eine zweytheilichte, und fast auf eben die Art gefunden werden kann. Man darf nur anfangs die beyden ersten Theile, wie bey den zweytheilichten suchen, die gefundenen Theile als einen ansehen, sie doppelt nehmen und damit dividiren, um den dritten Theil zu finden u. s. f. wie man aus folgendem Beyspiele sehen wird. Es sey nemlich die Wurzel aus 767376 zu finden.

$$\begin{array}{r|r|r|l} & & & a\,b\,c \\ 76 & 73 & 76 & (8\,7\,6 \\ \text{IV}\ a^2 = 64 & & & \\ \hline 12 & 73 & & \\ (16) & & & \end{array}$$

$$2'''ab = 112$$
$$b''^2 = 49$$
$$\overline{2'''ab + b''^2 = 1169}$$

$$\begin{array}{r|r} 104 & 76 \\ (174) & \end{array}$$

$$2(a+b)'c = 1044$$
$$\overset{\square}{c^2} = 36$$
$$\overline{2(a+b)'c + \overset{\circ}{c^2} = 10476}$$
$$\overset{\circ}{0}$$

Der Grund dieſer Rechnung iſt folgender. Weil ſich aus der gegebenen Quadratzahl drey Claſſen machen laſſen, ſo muß die Wurzel dreytheilicht ſeyn (§. 71.) Das Quadrat des erſten Theils muß ſich alſo auf Zehntauſende beziehen, (§. 74.) daher es in der erſten Claſſe linker Hand, wo die Zehntauſende ſtehen, geſucht worden iſt. Das Quadrat, welches 76 in dem Quadratfächelchen am nächſten kommt, iſt 64, und alſo die Wurzel davon, nemlich 8, der erſte Theil, der rechter Hand nach der gegebenen Quadratzahl geſetzt worden iſt, und der eigentlich Hunderte bedeutet, welches aber hier nicht beſonders angemerkt werden darf, weil er ſchon durch die Hinzuſetzung der andern beyden Theile ſeinen Werth aus der dritten Stelle erhält. Wird nun das Quadrat des erſten Theils abgezogen, ſo müſſen in den übriggebliebenen 12 Hunderten und den andern Zifern

7376 die noch übrigen Theile der Quadratzahl enthalten seyn. Weil man aber nicht gleich alle Zifern oder Theile nöthig hat, so rückt man nur die folgende Classe herunter, nimmt den gefundenen Theil 8 doppelt, setzt diese doppelte 8 d. i. 16 unter die Tausende, und dividirt sie damit, weil das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern bey einer dreytheilichten Wurzel Tausende bedeutet, (§. 74.) und $\frac{2\ ab}{2\ a} = b$ ist. (§. 19.) Den Divisor 2a d. i. 16 streicht man aus, oder schließt ihn in Häkchen ein, damit man ihn nicht beym Zusammenaddiren für einen Theil halte. 16 in 127 steckt 7 mal, welches also b oder der zweyte Theil ist, dieser neue Theil 7 multiplicirt in den Divisor 16, welcher 2 a ausmacht, giebt nothwendig 2 ab oder das zweyfache Product aus dem ersten Theile in den andern, welches unter die Tausende gesetzt wird, weil es sich darauf beziehet. Das folgende Stück der ganzen Quadratzahl nemlich b''^2 d. i. in diesem Falle 7^2 oder 49 bedeutet Hunderte, und wird daher eine Stelle weiter zur Rechten gerückt. Wird nun beydes addirt, und die Summe 1169 d. i. $2ab + b^2$ von 1273 abgezogen, so müssen in den übrig gebliebenen 104 Hunderten nebst 76 Einern, die beyden letzten Stücke der obigen Quadratzahl, nemlich $2(a + b')c + c^{\circ 2}$ enthalten seyn. Man rückt also die letzte Classe 76 herunter, nimmt die beyden gefundenen Theile der Wurzel 87 doppelt, und dividirt damit, um den dritten Theil zu erhalten, die Summe der Zehner, weil $2(a + b)' \asymp c$ sich auf Zehner beziehet. (§. 74.) Mit dem Quotienten 6, als dem dritten Theile der Wurzel, multiplicirt man den Divisor, und setzt

das Product unter die Zehner, so hat man 2 (a + b') × c, worunter man das Quadrat von 6 setzt, und zwar unter die Einer, weil es Einer bedeutet, und endlich die Summe von beyden aus der obern Zahl 10476 abzieht, um zu sehen, ob man nicht einen zu großen Theil genommen habe, und ob die gegebene Zahl ein vollkommnes Quadrat sey oder nicht. Wenn man den gefundenen Theil rechter Hand an den Divisor setzt, und mit demselben die ganze Zeile multiplicirt, so kann man die Rechnung viel kürzer haben. z E.

$$
\begin{array}{rl}
 & 76|73|76.(876. \\
a^2 = & 64 \\
\hline
 & 12|7.3 \\
 & (16)7 \\
2ab + b^2 = & 1169 \\
\hline
 & 104|76 \\
 & (174)6 \\
2(a+b)c + c^2 = & 10476 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Probe

876
876
5256
6132
7008
767376

§. 77.

Auf eine ähnliche Art würde man eine Wurzel suchen, die aus 4 und mehr Zifern bestünde. Man dürfte nur dieses überlegen, daß z. E. die Quadratzahl der ersten Zifer, die bey einer viertheilichten Wurzel Tausende bedeutet, sich auf Millionen beziehen, und folglich unter den Millionen gesucht werden müßte. Nach folgenden Regeln, die man nunmehr aus den vorhergehenden Sätzen verstehen wird, könnte die größte Quadratwurzel gefunden werden.

1. Man theile die gegebene Zahl in Classen von der Rechten gegen die Linke, und schneide für die ersten Classen alles

allemal zwey Zifern ab. Eine einzige Classe, nemlich die erste linker Hand, kann auch eine Zifer enthalten.

2. Man suche in dem Quadrattäfelchen die Zahl, welche in der ersten Classe linker Hand sich befindet, und nehme die nechst kleinere Quadratzahl, wofern man sie nicht selbst darinnen antrift, schreibe sie darunter, und subtrahire. Die Wurzel davon ist der erste Theil der Wurzel, die gesucht wird.

3. Nachdem man die folgende Classe heruntergerückt hat, so nehme man den gefundenen ersten Theil doppelt, und dividire damit die Zahl, die aus dem vorigen Ueberreste und der ersten Zifer der herunter gerückten Classe bestehet. Der Quotient ist der zweyte Theil der Quadratwurzel, der also neben dem ersten gesetzt wird.

4. Mit diesem neuen Theile multiplicire man den Divisor, welcher deswegen unter die zu dividirende Zahl gesetzt werden muß, und schreibe darunter, aber eine Stelle weiter zur Rechten das Quadrat des neuen Theils, addire beydes und subtrahire es von der obigen Zahl. Oder will man gleich beyde Stück ohne Addition auf einmal haben, so setze man den neuen Theil rechter Hand an den Divisor, und multiplicire damit die ganze Zeile.

5. Nachdem man wieder die folgende Classe heruntergerückt hat, so nehme man beyde gefundene Theile doppelt, und dividire damit die Zahl, welche aus dem vorigen Ueberreste, und der ersten Zifer der heruntergerückten Classe bestehet. Den Quotienten, als den dritten Theil, setze man neben die ersten beyden, und multiplicire damit, wie vorhin, den Divisor, setze hierzu das Quadrat des neuen Theils eine Stelle weiter zur Rechten, addire und ziehe die Summe wieder von der obern Zahl ab.

6. Nunmehr nehme man die ersten drey Theile doppelt, dividire damit, um den vierten zu finden, und verfahre in allen Stücken, wie vorhin.

7. Hat man den vierten Theil gefunden, und die übrige Rechnung angestellt, so nehme man diese gefundnen vier Theile doppelt, und rechne aufs neue nach der

vorigen Art, so daß man immer, wenn die Wurzel aus sehr vielen Theilen besteht, alle vorhergehende Theile als eine Zahl ansieht, und das zweyfache davon zum Divisor macht, und die Rechnung so lange fortsetzet, bis man alle Theile der Wurzel entdeckt hat.

§. 78.

Aus Brüchen macht man Quadrate, wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner in sich selbst multiplicirt. Denn das Quadrat einer jeden Zahl entsteht, wenn sie in sich selbst multiplicirt wird, (§. 68.) folglich muß auch ein Bruch durch die Multiplication in sich selbst zum Quadrat gemacht werden, und wenn man nun dieses thut, und z. E. $\frac{5}{6}$ in $\frac{5}{6}$ multiplicirt, so erhält man $\frac{5 \times 5}{6 \times 6}$ oder $\frac{25}{36}$. (§. 58.) Von 0, 3 d. i. $\frac{3}{10}$ würde also das Quadrat 0, 09 d. i. $\frac{9}{100}$ und von 0, 03 d. i. $\frac{3}{100}$ würde das Quadrat 0, 0009 d. i. $\frac{9}{10000}$ seyn, woraus man sieht, daß bey einem Decimalbruche das Quadrat Hundertheile bedeutet, wenn die Wurzel Zehntheile enthält, Zehntausendtheile aber, wenn sich die Wurzel auf Hunderttheile beziehet, und überhaupt, daß die Quadratzahl eines Decimalbruches noch einmal so viel Decimalstellen hat, als die Wurzel. Ferner ist klar, daß man die Wurzel aus einem Bruche finden wird, wenn man sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel zieht. Die Wurzel aus $\frac{25}{36}$ muß so viel seyn $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ d. i. $\frac{5}{6}$, weil sowohl der Zähler als der Nenner quadrirt wird, wenn man das Quadrat des Bruchs aus der Wurzel macht.

§. 79.

§. 79.

Aus den unvollkommenen Quadratzahlen lassen sich zwar die Wurzeln niemals nach der grösten Schärfe erhalten, man kann sie aber durch Näherung so weit suchen, daß der Fehler, der dabey begangen wird, für nichts mehr zu halten ist, wenn man die Zahlen in gleichgeltende Brüche verwandelt. Nun sind aber nicht alle Brüche gleich bequem. Man erwählt daher zu dieser Absicht nur Decimalbrüche, und zwar solche, deren Nenner vollkommne Quadratzahlen sind, damit man doch wenigstens aus dem Nenner die Wurzel völlig erhalten könne. Verwandelt man nun die Quadratzahl in Hunderttheile, so erhält man die Wurzel in Zehntheilen, verwandelt man sie in Zehntausendtheile, so erhält man die Wurzel in Hunderttheilen, (§. 78.) und überhaupt je gröser der Nenner des Bruchs ist, worein man die unvollkommne Quadratzahl verwandelt, desto mehr Decimalstellen wird die Wurzel erhalten, und desto mehr wird der Fehler vermindert werden. Z. E. wir wollen die Quadratwurzel aus 12 suchen, wovon man gleich wissen kann, daß sie gröser als 3 und kleiner als 4, folglich 3 und ein Bruch seyn muß. Um nun diesen Bruch einigermaßen zu finden, so wollen wir 12 durch einen Decimalbruch ausdrücken, und zum Nenner 100 nehmen, so ist $12 = {}^{1}\frac{200}{100}$ oder 12, 00 und folglich muß es einerley seyn, ob man die Wurzel aus 12 Ganzen oder aus 1200 Hunderttheilen suchet.

```
12|00(3,4
 9|
--+---
 3|00
  (6)4
 2 56
-----
   44
```

Die Wurzel aus 1200 vermöge der vorigen Rechnung ist ohngefehr 34, und folglich die Wurzel aus $\frac{1200}{100}$ nur $\frac{34}{10}$ d. i. 3, 4. (§. 78.) Weil aber am Ende noch 44 übrig blieb, so sieht man wohl, daß man noch nicht die wahre Wurzel gefunden, und vielleicht um einige Hunderttheile gefehlt hat, denn ein oder etliche Zehntheile kann der Fehler nicht betragen, weil man sonst statt des andern Theils 4 die Zahl 5 hätte nehmen können, welches aber hier nicht angeht. Wäre nur der Fehler von einem oder etlichen Hunderttheilen zu wichtig, so könnte man der Wahrheit immer näher kommen, wenn man einen größern Nenner erwählte, und z. E. 12 in 10000 Theile verwandelte. Denn da $\frac{120000}{10000} = 12$, so ist es einerley, ob man die Wurzel aus dem Bruche $\frac{120000}{10000}$ oder aus 12 suchet. Die Wurzel aus $\frac{120000}{10000}$ ist $\frac{\sqrt{120000}}{\sqrt{10000}}$ d. i. $\frac{\sqrt{120000}}{100}$ (78.) und folglich dürfte man nur die Wurzel aus 120000 suchen, und sie Hunderttheile bedeuten lassen, so würde man die Wurzel aus 12 erhalten.

12|00|00. (3. 46	Probe
9 | |	346
3|00	346
(6)4	2076
256	1384
44|00	1038
(68)6	119716
4116	284
284	120000

Nemlich die gefundene Zahl 346 ist so viel als $\frac{346}{100}$ oder $3\frac{46}{100}$, d. i. $3+\frac{4}{10}+\frac{6}{100}$, woraus man sehen kann, wenn man sie mit der vorigen Wurzel $3\frac{4}{10}$ vergleicht, daß man jetzt $\frac{6}{100}$ mehr erhalten und also weniger gefehlt habe, als vorhin. Wollte man nun die Wurzel aus 12 noch genauer haben, so dürfte man nur diese Zahl in einen Decimalbruch von einem noch größern Nenner, z. E. in 1000000 Theile verwandeln, so würde man die Wurzel in Tausendtheilen erhalten, und auf diese Art könnte man die Rechnung so lange fortsetzen, bis der Fehler, welcher noch dabey begangen würde, von keiner Erheblichkeit wäre. Bey der Probe ist noch dieses zu erinnern, daß man zu der Quadratzahl der Wurzel den Ueberrest addiren müsse. Denn z. E. 346 ist nicht eigentlich die Wurzel aus 120000, weil 284 übrig blieb, sondern aus einer Zahl, die um 284 Einheiten kleiner ist. Diese 284 Einheiten müssen also zu dem Quadrat von 346 gesetzt werden, wenn man die vorige Zahl 120000 erhalten will.

§. 80.

Da eine Cubikzahl nichts anders ist, als ein Product aus drey gleichen Factoren, wovon jeglicher die Wur-

Wurzel genannt wird, (§. 68.) so ist leicht einzusehen, daß man eine gegebene Zahl zur Cubikzahl erheben könne, wenn man das Quadrat derselben in die Wurzel multiplicirt; denn $2 \times 2 \times 2$ muß so viel seyn als 4×2 oder $2^2 \times 2$ d. i. 8 und $a \times a \times a$ soviel $a^2 \times a$. Wir können also erfahren, aus was für Theilen die Cubikzahl einer binomischen Wurzel bestehet, wenn wir sie in das Quadrat derselben multipliciren. Es bedeute daher wieder $a' + b^\circ$ jede mögliche zweytheilichte Wurzel, so ist das Quadrat derselben $a''^2 + 2\,a'b + b^{\circ 2}$ (§. 70.) welches wir nun durch die Wurzel $a' + b^\circ$ aufs neue multipliciren wollen.

$$\begin{array}{r} a''^2 + 2\,a'b + b^{\circ 2} \\ a' + b^\circ \\ \hline a''^2 b + 2\,a'b^2 + b^{\circ 3} \\ a'''^3 + 2\,a''^2 b + a'b^2 \\ \hline a'''^3 + 3\,a''^2 b + 3\,a'b^2 + b^{\circ 3} = (a+b)^3 \end{array}$$

Aus dieser Rechnung ersieht man, daß die Cubikzahl einer zweytheilichten Wurzel folgende 4 Stück enthalte, erstlich a^3 d. i. die Cubikzahl des ersten Theils, ferner $3\,a^2b$, d. i. ein dreyfaches Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den andern Theil, drittens $3\,ab^2$, d. i. ein dreyfaches Product aus dem ersten Theile in das Quadrat des andern Theils, und endlich b^3, d. i. die Cubikzahl des andern Theils. Und da sich der erste Theil auf Zehner, und das Quadrat

des-

deſſelben auf Hunderte beziehet, (§. 70.) ſo muß die Cubikzahl a^3 nothwendig Tauſende bedeuten, weil durch die Multiplication von 100 durch 10 Tauſend entſtehet. Auf eben die Art wird man den Grund leicht einſehen, warum $3a^2b$ Hunderte, $3ab^2$ Zehner, und b^3 Einer bedeuten müſſen.

§. 81.

Wir wollen gleich aus den Eigenſchaften der Cubikzahl einer zweytheilichten Wurzel die Eigenſchaften der Cubikzahlen vieltheilichter Wurzeln herleiten. Es heiſſe alſo, wie bey den Quadratwurzeln, jede mögliche dreytheilichte Wurzel $a + b + c$ und die Summe der erſten beyden Theile S, ſo iſt klar:

$$a + b = S$$
$$c = c$$

$$a + b + c = S + c \text{ (§. 13.)}$$

$$(a + b + c)^3 = (S + c)^3$$

$$(S + c)^3 = S^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 80.)}$$

$$(a + b + c)^3 = S^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 11.)}$$

$$S^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (§. 80.)}$$

$$(a + b + c)^3 =$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3S^2c + 3Sc^2 + c^3 \text{ (§. 9.)}$$

d. i. die Cubikzahl einer dreytheilichten Wurzel beſteht aus der Cubikzahl des erſten Theils, aus dem dreyfachen Producte von dem Quadrate des erſten Theils in den andern Theil, aus dem dreyfachen Producte von dem erſten Theile in das Quadrat des andern Theils, aus der Cubikzahl des andern Theils, aus dem dreyfachen Producte von der Quadratzahl der Summe der erſten beyden Theile in den dritten, aus dem dreyfachen Producte von der Summe der erſten

ersten beyden Theile in das Quadrat des dritten Theils, und aus der Cubikzahl des dritten Theils. Nimmt man nun an, daß der erste Theil a Hunderte bedeutet, so muß sein Quadrat hundertfache Hunderte oder Zehntausende, (§. 74.) und folglich die Cubikzahl davon Millionen bedeuten. (§. 80.) Es würde zu weitläuftig seyn, wenn ich zeigen wollte, auf was für eine Einheit sich die übrigen Theile der Cubikzahl beziehen müssen, da dieses ein jeder von selbst finden wird, der das vorhergehende verstanden hat. Wenn man sich auf die vorige Art eine viertheilichte und überhaupt jede polynomische Wurzel als eine zweytheilichte vorstellt, so wird man von der Allgemeinheit des Satzes überzeugt werden, daß die Cubikzahl einer jeden vieltheilichten Wurzel die Cubikzahl eines jeden Theiles, zweyfache Producte von dem Quadrate des ersten Theils in den andern, und dem Quadrate des andern Theils in den ersten, ferner lauter dreyfache Producte von dem Quadrate einer jeden Summe der vorhergehenden Theile in jeden folgenden, und von dem Quadrate eines jeden folgenden Theils in die Summe der vorhergehenden Theile enthalte.

§. 82.

Die eintheilichten Wurzeln aus vollkommnen Cubikzahlen lassen sich leicht finden, wenn man sich ein Täfelchen macht, wie das folgende ist, worinnen die Cubikzahlen aller einfachen Zahlen enthalten sind, und welches aus dem oben angeführten Quadrattäfelchen (§. 72.) entstehet, wenn man jede einfache Zahl in ihr Quadrat multipliciret.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Verlangt man also z. E. die Wurzel aus 343 zu wissen, so sucht man diese Zahl in der dritten Reihe; die darüber in der ersten Reihe befindliche Zahl 7 muß die Wurzel seyn. Dieses Täfelchen braucht man auch, um die Wurzeln zu entdecken, die aus 2 oder mehr Theilen bestehen, wie gleich gezeigt werden soll.

§. 83.

Wir werden in der Folge, um die zusammengesetzten Wurzeln zu suchen, die gegebenen Cubikzahlen von der Rechten gegen die linke zu in Classen theilen, und jeder Classe drey Zifern geben; der Grund davon ist dieser: Man erwähle sich eine Reihe Zahlen, wovon die folgende allemal zehnmal grösser ist, als die vorhergehende, und mache von jeder die Cubikzahl. z. E.

$$1^3 = 1$$
$$10^3 = 1000$$
$$100^3 = 1000000$$
$$1000^3 = 1000000000$$
$$10000^3 = 1000000000000$$

so wird man finden, daß die folgenden Cubikzahlen tausendmal grösser sind, und folglich aus 3 Figuren mehr bestehen, als die vorhergehenden, wenn die Wurzel zehnmal grösser ist, oder eine Figur mehr hat, als die vorhergehende Wurzel. Man kann also wissen, wie viel einzelne Theile eine zu suchende Wurzel enthält, wenn man untersucht, wie vielmal man 3 Fi-

Figuren in einer gegebenen Cubikzahl abschneiden kann.

§. 84.

Wollte man also aus einer gegebenen Zahl, z. E. aus 46656 die Cubikwurzel ziehen, welche nach §. 83. zweytheilicht ist, so müßte man folgende Rechnung anstellen:

		$\left(\begin{matrix}a\,b\\3\,6\end{matrix}\right.$	Probe
a'''	46 | 656		36
$a^3 = 27$			36
	19 | 656	$= 3\,a^2b'' + 3\,a'b^2 + \overset{\circ}{b}{}^3$	216
	(27)		108
$3\,a^2b'' =$	162		1296
$3\,a'b^2 =$	324		36
$\overset{\circ}{b}{}^3 =$	216		7776
	19 656		3888
	0		46656

Nemlich nach geschehener Abtheilung der gegebenen Zahl in Classen ist in dem Täfelchen (§. 82.) die Cubikzahl gesucht worden, welche den 46 Tausenden am nächsten kömmt, weil in den Tausenden die Cubikzahl des ersten Theils einer binomischen Wurzel stecken muß. (§. 80.) Ist nun $27'''$ die Cubikzahl von a, oder vom ersten Theil, so muß der erste Theil selbst die Wurzel von dieser Zahl, d. i. 3 Zehner seyn; und da die ganze Cubikzahl $a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ enthält, so muß der Ueberrest, wenn man die Cubikzahl des ersten Theils, d. i. in diesem Falle $27'''$ von der Cubikzahl abzieht, aus den Theilen $3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ bestehen. Wird $3\,a^2b$ durch $3\,a^2$ dividirt, so ist der Quotient b. (§. 19.) Man findet daher den andern Theil der Wurzel, wenn man die

die Zahl, worinnen $3\,a^2b$ zu suchen ist, d. i. die Hunderte (§. 80.) mit dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils dividirt. Das Quadrat von 3 ist 9, und dieses dreymal genommen 27, womit also 196 Hunderte dividirt worden sind. Der eigentliche Quotient ist zwar 7, dieser aber kann deswegen nicht der andere Theil der Wurzel seyn, weil alsdenn

$$\begin{array}{rl} 3\,a^2b'' = & 189'' \\ 3\,a'b^2 = & 441' \\ b^3 = & 343^\circ \\ \hline & 23653 \end{array}$$

und folglich diese drey Stücke zusammen genommen grösser seyn würden, als die obige Zahl 19656, in denen sie enthalten seyn müssen. Hieraus ergiebt sich also, daß der andre Theil der Wurzel eine kleinere Zahl als 7, nemlich 6 seyn muß. Dieser andere Theil 6 ist in den Divisor $27 = 3a^2$ multiplicirt worden, um $3\,a^2b$ zu erhalten. Das Product 162 muß also unter die Hunderte gesetzt werden, weil es Hunderte bedeutet. (§. 80.) Das Quadrat von 6 ist 36, dieses durch den ersten Theil der Wurzel, nemlich durch 3 Zehner multiplicirt, giebt 108 Zehner, und dreymal genommen, 324 Zehner, d. i. $3\,a'b^2$, welche daher eine Stelle weiter gegen die rechte Hand zu gesetzt worden sind. Die Cubikzahl von 6, d. i. hier von 6 Einern macht 216 Einer, die also noch eine Stelle weiter gegen die Rechte zu kommen müssen. Die Summe von diesen 3 Stücken beträgt 19656 und also völlig so viel als die obige Zahl 19656, woraus man sehen kann, daß 6 kein zu grosser Theil und 46656 eine vollkommne Cubikzahl ist. Das Quadrat von 36 ist 1296, und das Product aus

1296 in 36 der gegebenen Cubikzahl gleich, welches die Probe ist, daß man die wahre Wurzel gefunden hat.

§. 85.

Von den polynomischen Cubikwurzeln ist eben das zu erinnern, was von den polynomischen Quadratwurzeln gesagt worden ist. Man findet sie wie die binomischen, wenn man nur, nachdem man die ersten beyden Theile erhalten hat, die Summe derselben als eine einzige Zahl ansiehet, und die Rechnung auf die vorige Art fortsetzet. Nur muß man bey einer dreytheilichten Wurzel die Cubikzahl des ersten Theils unter den Millionen, (§. 81.) bey den viertheilichten Wurzeln unter den tausendfachen Millionen u. s. f. suchen, wie ein jeder von selbst einsehen wird, wenn er erwägt, daß bey einer viertheilichten Wurzel der erste Theil Tausende bedeutet. Folgende Regeln, nach denen man vieltheilichte Wurzeln sucht, werden also keine weitere Erläuterung nöthig haben, und ihre Anwendung wird sich aus dem beygefügten Exempel erkennen lassen.

1. Man theile von der Rechten gegen die Linke die gegebene Cubikzahl in Classen, und gebe jeder Classe 3 Zifern.

2. Man suche die Zahl, welche in der äussersten Classe zur Linken stehet, in dem Cubiktäfelchen, und nehme daraus die nächste kleinere Cubikzahl, wofern man sie selbst nicht darinnen antrift, und ziehe sie davon ab. Die Wurzel von dieser nächst kleinern Cubikzahl ist der erste Theil der gesuchten Wurzel.

3. Zu dem Ueberreste setze man die drey Zifern der folgenden Classe, multiplicire das Quadrat des ersten Theils mit 3, schreibe dieses Product dergestalt, daß seine niedrigste Zifer unter die höchste Zifer der folgenden Classe

zu stehen kömmt, und schliesse es in Häkchen ein, oder streiche es aus, damit man es im Addiren nicht für einen Theil ansehe.

4. Mit diesem dreyfachen Quadrate des ersten Theils dividire man die darüber stehende Zahl, so erhält man den zweyten Theil der Wurzel.

5. Diesen zweyten Theil der Wurzel multiplicire man in den vorigen Divisor, d. i. in das zweyfache Quadrat des ersten Theils, und schreibe das Product darunter.

6. Hierauf multiplicire man das Quadrat des andern Theils in den ersten Theil, und nehme dieses Product dreymal, oder welches einerley ist, man multiplicire das Quadrat des andern Theils mit dem dreyfachen ersten Theile, und schreibe das Product unter das vorige, doch eine Stelle weiter zur Rechten.

7. Hierunter setze man, und zwar wieder eine Stelle weiter zur Rechten die Cubikzahl des andern Theils, addire diese drey Stücke, und ziehe die Summe davon von der obigen Zahl ab. Ist die Summe größer, als die Zahl, aus welcher sie subtrahirt werden soll, so hat man einen zu großen Theil genommen, und muß diese Rechnung ändern.

8. Nunmehr sehe man die gefundenen ersten beyden Theile als eine Zahl an, multiplicire sie in sich selbst, nehme dieses Quadrat dreymal, und schreibe dasselbe, nachdem man die folgende Classe herunter gerückt hat, dergestalt, daß seine niedrigste Zifer unter die höchste Zifer der folgenden Classe zu stehen komme.

9. Mit diesem dreyfachen Quadrate von der Summe der ersten beyden Theile dividire man die darüber stehende Zahl, so ist der Quotient der dritte Theil der Wurzel.

10. Den dritten Theil der Wurzel multiplicire man in den vorigen Divisor, und schreibe das Product gerade unter ihn.

11. Das Quadrat des dritten Theils multiplicire man in die dreyfache Summe der beyden vorhergehenden Thei-

le, und ſchreibe dieſes Product unter das vorige eine Stelle weiter gegen die rechte Hand.

12. Hierzu ſetze man noch, und zwar wieder eine Stelle weiter gegen die rechte Hand die Cubikzahl des dritten Theils, addire dieſe drey Stücke, und ziehe die Summe von der obern Zahl ab.

13. Enthält die Wurzel noch mehr Theile, ſo rücke man die folgende Claſſe herunter, betrachte die drey gefundnen Theile als eine Zahl, multiplicire ſie in ſich ſelbſt und nehme dieſes Quadrat dreymal. Hierauf verfahre man wie vorhin, und ſetze die Rechnung ſo lange fort, bis man alle Theile der Wurzel gefunden hat.

Der Grund von dieſen Regeln iſt §. 80. §. 81. und §. 84. enthalten.

Exempel.

Es ſey die Cubikwurzel aus 279726264 zu ſuchen.

279|726|264 (abc
                654
a3 = 216
63|726
(108)
3 a2b = 540
3 ab2 = 450
b3 = 125
58625
5101|264
(12675)
3 S2c = 50700
3 Sc2 = 3120
c3 = 64
5101264
0

b2 = 52 = 25
3a = 3 × 6 = 18
200
25
3 ab2 = 450
S = 65
65
325
390
S2 = 4225
3 S2 = 12675
3 S = 3 × 65 = 195
c2 = 42 = 16
1170
195
3 Sc2 = 3120

Probe

Probe

654
654
2616
3270
3924
427716
654
1710864
2138580
2566296
279726264

§. 86.

Brüche werden zu Cubikzahlen erhoben, wenn man sowohl von dem Zähler, als auch von dem Nenner die Cubikzahl macht. Denn vermöge der Definition ist die Cubikzahl von einem Bruche, z. E. von $\frac{3}{4}$, das Quadrat von $\frac{3}{4}$ multiplicirt in $\frac{3}{4}$, d. i. $\frac{3^2}{4^2} \times \frac{3}{4}$ oder $\frac{3^3}{4^3}$ (§. 58.) und wenn man die wirklichen Cubikzahlen nimmt $\frac{27}{64}$. Ist also der Bruch $\frac{27}{64}$, welcher die Cubikzahl von $\frac{3}{4}$ vorstellt, aus der Cubikzahl von dem Zähler und Nenner dieses letztern Bruchs entstanden, so muß man nothwendig die Cubikwurzel von $\frac{27}{64}$ und von einem jeden Bruche erhalten, wenn man sowohl aus seinem Zähler, als auch aus seinem Nenner die Cubikwurzel sucht. Wenden wir diese Sätze nun auf diejenige Gattung von Brüchen an, die man Decimalbrüche nennt, so wird folgen, daß die Cubikwurzel eines solchen Bruchs 10 Theile bedeuten muß, wenn die Cubikzahl 1000 Theile, und 100 Theile, wenn diese Millionentheile bedeutet.

deutet. Denn es sey die Wurzel $\frac{3}{10}$, so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{10 \times 10 \times 10}$ d. i. $\frac{27}{1000}$ seyn. Es sey ferner die Wurzel $\frac{3}{100}$, so muß die Cubikzahl $\frac{3 \times 3 \times 3}{100 \times 100 \times 100}$ d. i. $\frac{27}{1000000}$ seyn. u. s. w. f.

§. 87.

Verwandelt man unvollkommne Cubikzahlen in Decimalbrüche, deren Nenner vollkommne Cubikzahlen sind, so läßt sich die Wurzel derselben so weit finden, daß der dabey begangene Fehler für unerheblich gehalten werden kann. Je größer man den Nenner annimmt, desto genauer wird sich auch die Wurzel bestimmen lassen. Es sey z. E. die Cubikwurzel aus 18 zu suchen. $\frac{18 \times 1000}{1000}$ oder $\frac{18000}{1000}$ ist so viel als 18 (§. 29.) und folglich muß $\frac{18000}{1000}$ und 18 einerley Wurzel haben. Die Wurzel aber aus $\frac{18000}{1000}$ würde man erhalten, wenn man so wohl aus dem Zähler 18000, als auch aus dem Nenner 1000 die Wurzel suchte. (§. 86.) Die Wurzel aus dem Nenner ist 10; man hat daher weiter nichts zu thun, als die Wurzel aus dem Zähler 18000 zu suchen, und dieselbe als den Zähler eines Bruchs anzusehen, dessen Nenner 10 ist.

```
18|000 (26
 8
---
10|000
 (12)
  72
  216
   216
-------
  9576
-------
   424
```

Da nun vermöge dieser Rechnung die Wurzel aus 18000 ohngefehr 26 ist, so muß die Wurzel aus $\frac{18000}{1000}$ d. i. aus 18 ohngefehr $\frac{26}{10}$ oder $2\frac{6}{10}$ seyn. Wollte man diese Wurzel noch genauer haben, so müßte man die Zahl 18 in einen Decimalbruch mit einem größern Nenner, z. E. in 1000000 Theile verwandeln, in welchem Falle die Cubikwurzel 100 Theile bedeuten würde. (§. 86.) Statt 18 nehme man also den gleichgeltenden Bruch $\frac{18000000}{1000000}$ und suche daraus die Wurzel.

```
18|000|000 (262
 8
---
10|000
 (12)
  72
  216
   216
-------
  9576
-------
   424|000
    (2028)
     4056
      312
        8
-------------
     408728
-------------
      15272
```

Probe

```
   262
   262
-------
   524
  1572
   524
-------
 68644
   262
-------
 137288
 411864
 137288
---------
17984728
  15272
---------
18000000
```

Hieraus ist klar, daß die Wurzel aus 18 ungefehr so viel betragen muß, als $\frac{262}{100}$ oder 2, 62, welche Zahl um $\frac{2}{100}$ Theile grösser ist, als die vorige 2, 6 woraus man also sehen kann, daß man die Wurzel immer genauer erhält, je grösser man den Nenner des Decimalbruchs annimmt, in welchen man die unvollkommne Cubikzahl verwandelt.

Fünftes Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 88.

Die Vergleichung einer Zahl mit einer andern von eben der Art in Ansehung ihrer Grösse nennt man ein **Verhältnis** (ratio); die Zahlen selbst, die man mit einander vergleicht, heissen **Glieder des Verhältnisses** (termini rationis), und zwar diejenige, die man zuerst setzt, das **Vorderglied**, (terminus antecedens) und die andre das **Hinterglied** (terminus consequens). Man kann aber die Zahlen überhaupt auf zweyerley Art mit einander vergleichen. Nemlich man untersucht entweder, um wie viel Einheiten die eine Zahl grösser ist, als die andere, oder wie vielmal die eine grösser ist, als die andre. Die erste Art der Vergleichung, da man fragt, wie viel Einheiten die eine Zahl mehr oder weniger enthält, als die andre, welches man durch die Subtraction findet, nennt man ein **arithmetisches Verhältnis** (ratio arithmetica), weil dergleichen Verhältnisse nur in den arithmetischen Wissenschaften vorkommen. Das Zeichen derselben ist ein Punkt

oder

ein Querstrich, z. E. 8 . 5 oder 8 — 5. Die
, welche man nach der Vergleichung erhält, und
welcher man sehen kann, um wie viel Einheiten
eine Glied grösser oder kleiner ist, als das andre,
. in dem vorigen Beyspiele die Zahl 3, wird, wie
der Subtraction der **Unterschied** oder die **Dif-**
:nz genannt.

Die andre Art der Vergleichung, wo gefragt
d, wie vielmal die eine Zahl grösser oder kleiner
als die andre, welches man durch die Division
ihrt, heißt ein **geometrisches Verhältnis** (ra-
geometrica) und wird durch zwey übereinander
ende Puncte angedeutet. z. E. 18 : 9. Das Bey-
rt geometrisch wird auch oft weggelassen, weil man
den ältern Schriftstellern nur diese Art der Ver-
ltnisse findet. Der Quotient, aus welchem man
eht, wie vielmal das eine Glied in dem andern
thalten ist, z. E. in dem vorigen Beyspiele 2 wird
r **Exponent** oder **Name des Verhältnisses**
xponens rationis) genannt.

§. 89.

Aus der Gleichheit oder Aehnlichkeit zweyer
erhältnisse einer Art entstehet eine **Proportion**,
elche man **arithmetisch** nennt, wenn sie aus arith-
etischen Verhältnissen, und **geometrisch**, wenn
aus geometrischen Verhältnissen bestehet. Das
wöhnliche Zeichen der Proportionen ist das Zeichen
r Gleichheit, welches zwischen die Verhältnisse ge-
zt wird. z. E. 8 . 3 = 9 . 4 oder 8 — 3 = 9 — 4
deutet eine arithmetische, und 2 : 14 = 3 : 21
ne geometrische Proportion. Statt des Zeichens
r Gleichheit setzen einige bey den arithmetischen
roportionen drey Puncte ⋮ und bey den geometri-

schen vier Puncte ∴ . Beyde Proportionen pflegt man also zu lesen: wie sich verhält die erste Zahl zu der andern, so verhält sich auch die dritte zu der vierten. Aus den angeführten Erklärungen aber wird ein jeder schon selbst einsehen, daß diese Worte bey den geometrischen Proportionen eine ganz andre Bedeutung haben, als bey den arithmetischen. Bey den arithmetischen Proportionen wollen sie so viel sagen: Um wie viel Einheiten die erste Zahl grösser oder kleiner ist, als die andre, um eben so viel Einheiten ist auch die dritte Zahl grösser oder kleiner als die vierte. Bey den geometrischen aber muß man sie so erklären: so vielmal die erste Zahl in der andern enthalten ist, so vielmal muß auch die dritte Zahl in der vierten enthalten seyn, oder, so vielmal die erste Zahl die andre enthält, so vielmal muß auch die dritte die vierte enthalten. Was hier von den Zahlen gesagt wird, das gilt auch von den Grössen überhaupt, die man sowohl arithmetisch als auch geometrisch mit einander vergleichen kann, wofern sie nur von einer Art sind, daher wir auch im folgenden Verhältnisse und Proportionen durch Buchstaben ausdrücken werden.

§. 90.

Sowohl die arithmetischen als auch die geometrischen Proportionen werden **stetig** genannt (**proportiones continuae**), wenn das zweyte und dritte Glied einerley ist, **unstetig** aber, (**proportiones discretae**) wenn diese mittlern Glieder verschieden sind. z. E. 10 : 20 = 20 : 40 ist eine stetige geometrische, 10 . 7 = 7 . 4 eine stetige arithmetische; 17 . 10 = 15 . 8 eine unstetige arithmetische, und 9 : 3 = 18 : 6 eine unstetige geometrische Proportion.

§. 91.

§. 91.

Wir wollen nunmehr die Eigenschaften der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen kürzlich untersuchen, die sich leicht aus der gegebenen Erklärung derselben werden herleiten lassen. Zuerst ist klar aus §. 88. daß man das grössere Glied eines arithmetischen Verhältnisses erhalten muß, wenn man das kleinere Glied und die Differenz addirt. Ist z. E. 7 das kleinere Glied, und 8 die Differenz, so muß 7 + 8 oder 15 das grössere Glied seyn, oder allgemein betrachtet, ist a das kleinere Glied, und d die Differenz, so muß a + d das grössere Glied seyn. Aus eben dem Grunde wird auch der ungeübteste leicht einsehen, daß man das kleinere Glied erhält, wenn man die Differenz von dem grössern abzieht.

§. 92.

Sollen zwey arithmetische Verhältnisse eine Proportion ausmachen, so müssen sie, vermöge der Erklärung, einander gleich seyn, (§. 89.) d. h. beyde Verhältnisse müssen nicht nur einerley Differenz geben, sondern die Ordnung der Glieder muß auch in beyden einerley seyn, nemlich wenn in dem ersten Verhältnisse das Vorderglied grösser ist, als das Hinterglied, so muß auch in dem andern Verhältnisse das Vorderglied grösser seyn, als das Hinterglied, und so auch umgewendet. Wir wollen uns nunmehr jede mögliche arithmetische Proportion durch Buchstaben vorstellen, um uns genau von der Allgemeinheit der Sätze zu überzeugen, die von diesen Proportionen zu merken sind. Es heisse das kleinere Glied des ersten Verhältnisses a, und des andern Verhältnisses b, die Differenz d, die in beyden Verhältnissen

sen einerley seyn muß, weil sie eine Proportion ausmachen sollen. Auf diese Art wird das grössere Glied des ersten Verhältnisses a + d, und das grössere Glied des andern Verhältnisses b + d seyn, (§. 91.) woraus folgende Proportion entstehet:

a . a + d = b . b + d

Nimmt man nun von dieser Proportion, die jede mögliche arithmetische Proportion vorstellen kann, das erste und vierte Glied, ferner das zweyte und dritte Glied in eine Summe, so wird man finden, daß beyde Summen einander gleich sind, weil sie beyde aus den Grössen a, b, d bestehen. Hieraus erhellt also der Satz: **in einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe aus dem ersten und letzten Gliede der Summe aus dem zweyten und dritten Gliede gleich.** z. E.

15 . 13 = 10 . 8

Die Summe von 15 und 8 ist 23 und von 13 und 10 auch 23, und so in andern dergleichen Fällen mehr. In einer stetigen Proportion ist das zweyte und dritte Glied einerley, (§. 90.) und folglich die Summe aus dem ersten und letzten Gliede so viel, als das mittelste Glied zweymal genommen. z. E.

16 , 10 = 10 , 4

Hier muß die Summe von 16 + 4 so groß seyn, als 10 zweymal genommen. Hat man also folgende arithmetische Proportion

g . c = c . m

so ist

g + m = 2 c

§. 93.

Wenn man in der vorigen Proportion a . a + d = b . b + d (§. 92.) wodurch wir uns

uns jede mögliche Proportion vorgestellt haben, das vierte Glied b + d mit den vorhergehenden Gliedern vergleicht, so wird man finden, daß es so groß ist, als die Summe der mittlern beyden b und a + d weniger dem ersten Gliede a. Werden uns also drey Zahlen oder Grössen gegeben, zu denen man die vierte arithmetische Proportionalgrösse finden soll, so dürfen wir nur die beyden mittlern Glieder addiren, und von der Summe das erste Glied abziehen. z. E. die drey gegebenen Zahlen sollen seyn: 19 . 3 . 18, so wäre die gesuchte vierte Zahl 3 + 18 — 19, d. i. 21 — 19 oder 2, wovon man sich leicht durch die Probe überzeugen kann, denn

$$19 . 3 = 18 . 2$$

weil in beyden Verhältnissen der Unterschied 16 ist. Soll man also zu den Grössen m, q, f die vierte Proportionalgrösse suchen, so muß dieselbe aus eben dem Grunde q + f — m seyn. Bey einer stetigen Proportion kann man daher aus den ersten beyden Gliedern das letzte bestimmen, wenn man das erste Glied von dem doppelten andern Gliede subtrahirt; weil hier die Summe aus dem andern und dritten Gliede so viel beträgt, als das andre Glied zweymal genommen.

§. 94.

Es mache a, b, c eine stetige arithmetische Proportion aus, d. i. es sey

$$a . b = b . c$$

so ist

$$a + c = 2 b \quad \text{(§. 92.)}$$

folglich

$$\frac{a + c}{2} = \frac{2 b}{2} = b \quad \text{(§. 18. §. 19.)}$$

Hieraus ersieht man also, daß sich das mittlere Glied bey

bey einer arithmetischen stetigen Proportion finden läßt, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes halbirt, z. E. es sey das erste Glied einer solchen Proportion die Zahl 13, und das letzte die Zahl 17, so wird das mittelste Glied nothwendig $\frac{13+17}{2}$ d. i. $\frac{30}{2}$ oder 15 seyn müssen. Es verhält sich auch in der That

$$13 . 15 = 15 . 17 .$$

§. 95.

Da bey den geometrischen Verhältnissen die Zahlen dergestalt verglichen werden, daß man untersucht, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist, oder wie vielmal die eine Zahl die andre enthält, welches durch den Exponenten angezeigt wird, (§. 88.) so ist klar, daß man sich ein geometrisches Verhältnis als eine Division oder als einen Bruch, und eine Division oder einen Bruch als ein geometrisches Verhältnis vorstellen kann, welches auch die Ursache ist, daß man bey den geometrischen Verhältnissen und Quotienten einerley Zeichen gebraucht. Man kann daher das eine Glied eines geometrischen Verhältnisses als den Dividendum, das andre Glied desselben als den Divisor, und den Exponenten als den Quotienten ansehen. Hieraus folgt also, daß man das grössere Glied bekommen wird, wenn man das kleinere in den Exponenten multiplicirt, und das kleinere, wenn man das grössere durch den Exponenten dividirt. Nennt man nun das kleinere Glied a und den Exponenten e, so kann man das grössere durch das Product a $\times$ e ausdrücken. (§. 38.)

§. 96.

Zwey gleiche oder ähnliche geometrische Verhältnisse machen eine geometrische Proportion aus. (§. 89.)

(§. 89.) Man kann aber geometrische Verhältnisse nicht gleich oder ähnlich nennen, wofern sie nicht einerley Exponenten und einerley Ordnung der Glieder haben. Hieraus folgt also, daß man eine geometrische Proportion in zwey gleiche Quotienten, und zwey gleiche Quotienten oder Brüche in eine Proportion wird verwandeln können. (§. 95.) Verhält sich also d zu g, wie f zu m, so kann man schliessen, daß der Quotient oder Bruch $\frac{d}{g}$ dem Quotienten oder Bruche $\frac{f}{m}$ gleich sey; und wiederum ist der Bruch oder Quotient $\frac{d}{g}$ so groß, als der Bruch oder Quotient $\frac{f}{m}$, so muß der erste Dividendus zu seinem Divisor oder der erste Zähler zu seinem Nenner sich eben so verhalten, wie der andre Dividendus zu seinem Divisor, oder wie der andre Zähler zu seinem Nenner.

§. 97.

Wir wollen die beyden kleinern Glieder einer solchen Proportion a und b, den Exponenten aber e nennen, so wird das größere Glied des ersten Verhältnisses $a \times e$ und das größere Glied des andern Verhältnisses $b \times e$ (§. 95.) und also die ganze Proportion folgende seyn:

$$a : a \times e = b : b \times e$$

Durch welchen Ausdruck man sich jede mögliche geometrische Proportion vorstellen kann. Multiplicirt man das erste und vierte Glied in einander, so besteht das Product aus den drey Factoren a, b, e, d. i. aus den beyden kleinern Gliedern der Proportion und dem

dem Exponenten. Multiplicirt man das zweyte und dritte Glied in einander, so erhält man ein Product von eben diesen drey Factoren a, e, b, woraus man also sehen kann, daß ein Product aus dem ersten und letzten Gliede einer geometrischen Proportion eben so groß ist, als ein Product aus dem zweyten und dritten Gliede. Verhält sich daher

$$\frac{5 : 10 = 3 : 6}{\text{so ist } 5 \times 6 = 10 \times 3}$$

$$\text{oder } \frac{12 : 4 = 6 : 2}{\text{so ist } 12 \times 2 = 4 \times 6}$$

Und weil bey einer stetigen Proportion das zweyte und dritte Glied einerley ist, so muß hier das Product des ersten und letzten Gliedes der Quadratzahl des mittlern Gliedes gleich seyn. Wenn also

$$\frac{1 : 5 = 5 : 25}{\text{so ist } 1 \times 25 = 5^2}$$

$$\text{oder wenn } \frac{c : m = m : g}{\text{so ist } c \times g = m^2}$$

§. 98.

Wenn vier Größen eine geometrische Proportion ausmachen, so müssen sie auch noch proportional seyn, wenn man jedes Verhältnis oder die ganze Proportion umwendet. Z. E. wenn sich verhält

$$16 : 32 = 9 : 18$$

$$\text{und überhaupt } b : f = m : g$$

so muß sich auch verhalten invertendo, wie die Mathematiker zu reden pflegen,

	32	:	16	=	18	:	9
und	f	:	b	=	g	:	m
oder	18	:	9	=	16	:	32
und	g	:	m	=	f	:	b

Denn der Exponent kann durch diese Versetzung nicht verändert werden, weil jedes Verhältnis die vorigen Glieder behält, und da beyde Verhältnisse umgewandt werden, so muß auch wiederum einerley Ordnung der Glieder und folglich ähnliche Verhältnisse oder eine Proportion entstehen (§. 96).

§. 99.

Werden zwey Zahlen oder Größen mit einerley Zahl oder Größe multiplicirt, so müssen sich die Producte eben so verhalten, wie die multiplicirten Zahlen oder Größen. z. E.

$$a : b = a \times e : b \times e$$
$$\text{oder } 3 : 6 = 3 \times 4 : 6 \times 4$$
$$\text{d. i. } 12 : 24$$

Denn das Verhältnis a : b kann man auch als einen Quotienten oder Bruch ansehen (§. 95.) Ein Bruch aber wird in Ansehung seines Werths nicht verändert, wenn man seinen Zähler und Nenner durch einerley Grösse multiplicirt, (§. 49.) folglich ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times e}{b \times e}$$

Und weil zwey gleiche Brüche eine Proportion ausmachen (§. 96.)

$$a : b = a \times e : b \times e$$

§. 100.

Da die grössern Glieder eines geometrischen Verhältnisses durch die Multiplication der kleinern

Glieder in den Exponenten entstehen (§. 95.), und die Exponenten in solchen Verhältnissen, die eine Proportion ausmachen, einerley seyn müssen, (§. 96.) so folgt hieraus, daß sich in jeder Proportion das erste Glied zum dritten verhalten muß, wie das zweyte zum vierten, welches man alternando oder permutando schliessen heißt. Es werde wie §. 97. jede mögliche geometrische Proportion also ausgedrückt:

$$a : a \times e = b : b \times e$$

so ist altern.	$a : b = a \times e : b \times e$		
oder in Zahlen	$8 : 24 = 16 : 48$		
d. i.	$8 : 8 \times 3 = 16 : 16 \times 3$		(§. 95.)
folglich	$8 : 16 = 8 \times 3 : 16 \times 3$		(§. 99.)
d. i.	$8 : 16 = 24 : 48$		

§. 101.

Man kann daher nicht nur beyde Glieder eines Verhältnisses, oder alle Glieder einer Proportion, sondern auch das erste und dritte, oder das zweyte und vierte Glied durch einerley Größe multipliciren, und dennoch proportionale Größen behalten. Z. E. wenn sich verhält

$$a : b = c : m$$

so ist
1.) $a \times e : b \times e = c : m$
2.) $a \times e : b \times e = c \times e : m \times e$
3.) $a \times e : b = c \times e : m$
4.) $a : b \times e = c : m \times e$

denn da sich vermöge der Voraussetzung verhält

$$a : b = c : m$$

und $a : b = a \times e : b \times e$ (§. 99.)

so folgt 1.)	$a \times e : b \times e$	$= c : m$	(§. 11.)
und da	$c : m$	$= c \times e : m \times e$	(§. 99.)
2.)	$a \times e : b \times e$	$= c \times e : m \times e$	(§. 11.)

Ferner

Ferner weil $a : b = c : m$

altern. $a : c = b : m$ (§. 100.)

$a \times e : c \times e = b : m$ (p. membr. 1.)

altern. 3) $a \times e : b = c \times e : m$

Endlich weil $a : c = b : m$

$a : c = b \times e : m \times e$ (p. memb. 1.)

altern. 4) $a : b \times e = c : m \times e$ (§. 100.)

§. 102.

Durch den vorigen Satz kann man also die Brüche aus einem Verhältnisse wegschaffen, wenn man die Glieder desselben mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt. Z. E. wenn sich zwey Grössen A und B wie die Zahlen 8 und $\frac{2}{3}$ verhielten, so könnte man schliessen, daß sich diese beyden Grössen auch wie die ganzen Zahlen 24 und 2 verhalten müsten. Denn wenn

$A : B = 8 : \frac{2}{3}$

so folgt, daß $A : B = 8 \times 3 : \frac{2}{3} \times 3$ (§. 101.)

d. i. $A : B = 24 : 2$

§. 103.

Werden zwey Grössen durch einerley Grösse dividirt, so müssen sich die Quotienten eben so verhalten, wie die beyden dividirten Grössen. Z. E.

$$a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$$

oder $40 : 80 = \frac{40}{10} : \frac{80}{10}$

d. i. $40 : 80 = 4 : 8$

Denn verwandelt man das Verhältnis a : b in einen Bruch (§. 95.) und dividirt man den Zähler und

Nenner dieſes Bruchs durch einerley Gröſſe, z. E. durch d, ſo muß

$$\frac{\frac{a}{d} : \frac{d}{d}}{\frac{b}{d} : \frac{d}{d}} = \frac{a}{b} \quad (\S. 49.)$$

und folglich $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = a : b$ (§. 96.)

§. 104.

Man kann daher nicht nur beyde Glieder eines Verhältniſſes, oder alle Glieder einer Proportion, ſondern auch das erſte und dritte, oder das zweyte und vierte Glied durch einerley Gröſſe dividiren, und es muß allemal eine neue Proportion entſtehen. Wenn alſo

$$\frac{a : b = c : m}{}$$

ſo verhält ſich 1) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = c : m$

2) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$

3) $\frac{a}{d} : b = \frac{c}{d} : m$

4) $a : \frac{b}{d} = c : \frac{m}{d}$

und in Zahlen, wenn

$$\frac{30 : 60 = 18 : 36}{}$$

$\frac{30}{6} : \frac{60}{6} = 18 : 36$

d. i. $5 : 10 = 18 : 36$

oder $\frac{30}{6} : \frac{60}{6} = \frac{18}{6} : \frac{36}{6}$

d. i. $5 : 10 = 3 : 6$

oder

oder $\frac{30}{6} : 60 = \frac{18}{6} : 36$

d. i. $5 : 60 = 3 : 36$

oder $30 : \frac{60}{6} = 18 : \frac{36}{6}$

d. i. $30 : 10 = 18 : 6$

Von allen diesen Proportionen ist der Grund folgender: Wenn

$$a : b = c : m$$

und $a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$ (§. 103.)

---

1) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = c : m$ (§. 11.)

$c : m = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$ (§. 103.)

---

2) $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$

Ferner weil $a : b = c : m$

---

altern. $a : c = b : m$ (§. 100.)

$\frac{a}{d} : \frac{c}{d} = b : m$ (p. memb. 1.)

---

altern. 3) $\frac{a}{d} : b = \frac{c}{d} : m$

Endlich weil $a : b = c : m$

$a : b = \frac{c}{d} : \frac{m}{d}$ (p. memb. 1.)

---

altern. 4) $a : \frac{c}{d} = c : \frac{m}{d}$ (§. 100.)

Durch diesen Satz kann man sehr oft Verhältnisse und Proportionen, die aus grossen Zahlen bestehen,

in andre verwandeln, die kleinere Zahlen enthalten, wofern sich nur die vorhin genannten Glieder durch einerley Zahl dividiren lassen.

§. 105.

Die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer geometrischen Proportion verhält sich zu dem andern Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede. Z. E. wenn

$$a : b = c : m$$

so verhält sich $a + b : b = c + m : m$ componendo

Denn da man aus einer Proportion zwey gleiche Brüche machen kann, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{m} \quad (\S. 96.)$$

$$\frac{b}{b} = \frac{m}{m} \quad (\S. 47.)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{m} + \frac{m}{m} \quad (\S. 13.)$$

d. i. $\frac{a + b}{b} = \frac{c + m}{m}$ (§. 53.)

folglich $a + b : b = c + m : m$ (§. 96.)

Exempel in Zahlen:

$$16 : 4 = 32 : 8$$

comp. $16 + 4 : 4 = 32 + 8 : 8$

d. i. $20 : 4 = 40 : 8$

§. 106.

§. 106.

Den Unterschied der ersten beyden Glieder einer geometrischen Proportion verhält sich zum andern Gliede, wie der Unterschied der lezten beyden Glieder zum lezten Gliede. Z. E. wenn

$$a : b = c : m$$

so verhält sich $a - b : b = c - m : m$

Denn aus der Proportion

$$a : b = c : m$$

folget, daß $\frac{a}{b} = \frac{c}{m}$ (§. 96.)

$$\frac{b}{b} = \frac{m}{m}$$ (§. 47.)

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{m} - \frac{m}{m}$$ (§. 14.)

d. i. $\frac{a - b}{b} = \frac{c - m}{m}$ (§. 53.)

$a - b : b = c - m : m$ (§. 96.)

Exempel in Zahlen:

$$25 : 5 = 30 : 6$$

$$25 - 5 : 5 = 30 - 6 : 6$$

d. i. $20 : 5 = 24 : 6$

§. 107.

Wenn sich verhält

$$a : b = d : g$$

und $$m : c = f : n$$

so muß auch $a \times m : b \times c = d \times f : g \times n$

Denn aus der ersten Proportion folgt, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{g} \qquad (§.\ 96.)$$

und aus der andern, daß

$$\frac{m}{c} = \frac{f}{n}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{c} = \frac{d}{g} \times \frac{f}{n} \qquad (§.\ 17.)$$

$$\frac{a \times m}{b \times c} = \frac{d \times f}{g \times n} \qquad (§.\ 58.)$$

folglich $a \times m : b \times c = d \times f : g \times n$ (§. 96.)

Exempel in Zahlen:

$$3 : 2 = 6 : 4$$
$$10 : 5 = 14 : 7$$

$$3 \times 10 : 2 \times 5 = 6 \times 14 : 4 \times 7$$

d. i. $30 : 10 = 84 : 28$

§. 108.

Wenn man einerley Proportion zweymal setzt, und die Glieder, die einerley Stelle haben, nach der vorigen Art in einander multiplicirt, so entstehen lauter Quadratzahlen. Z. E.

$$a : b = d : g$$
$$a : b = d : g$$

$$a \times a : b \times b = d \times d : g \times g$$

das ist $a^2 : b^2 = d^2 : g^2$

Hieraus ist also klar, wenn vier Größen eine geometrische Proportion ausmachen, so müssen auch ihre Quadratzahlen proportional seyn.

§. 109.

§. 109.

Wenn also

	a	:	b	=	d	:	g	
und	a^2	:	b^2	=	d^2	:	g	(§. 108.)
	$a \times a^2$	:	$b \times b^2$	=	$d \times d^2$	:	$g \times g^2$	(§. 107.)
	a^3	:	b^3	=	d^3	:	g^3	

nemlich auch die Cubikzahlen befinden sich in einer geometrischen Proportion, wenn die Cubikwurzeln proportional sind.

§. 110.

Oft geschieht es, daß man diejenigen Größen, deren Verhältnis man wissen will, nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann. In diesem Falle pflegt man noch eine dritte, oder auch mehrere zu Hülfe zu nehmen, und eine Vergleichung derselben mit jeder von den beyden Größen anzustellen. Z. E. sollte das Verhältnis der Größen A und B untersucht werden, die sich nicht unmittelbar mit einander vergleichen liessen; so vergleiche man beyde mit einer dritten Größe C, mit welcher eine Vergleichung möglich ist. Verhält sich nun

	A	:	C	=	1	:	4	
und	C	:	B	=	2	:	3	
	$A \times C$	:	$C \times B$	=	1×2	:	4×3	(§. 107.)
	$\frac{A \times C}{C}$	:	$\frac{C \times B}{C}$	=	1×2	:	4×3	(§. 104.)
d. i.	A	:	B	=	1×2	:	4×3	(§. 19.)
oder	A	:	B	=	2	:	12	

Unter den angenommenen Bedingungen müssen sich also die beyden Größen A und B wie die Zahlen 2 und 12 verhalten, welche nichts anders sind, als Producte aus den Gliedern der beyden Verhältnisse

1 : 4 und 2 : 3. Man pflegt solche Verhältnisse wie A : B zusammengesetzte Verhältnisse, (rationes compositas) und diejenigen, wie 1 : 4 und 2 : 3, vermittelst welcher man erkennt, wie sich die zu vergleichenden Größen verhalten, rationes componentes zu nennen; von einigen werden sie auch folgendergestalt geschrieben:

$$A : B = \overline{1 : 4} + \overline{2 : 3}$$

wo aber das Zeichen + keine Addition, sondern nur eine Zusammensetzung der Verhältnisse, d. h. eine Multiplication anzeigt, wie man aus dem vorhergehenden sehen kann. Ein solch zusammengesetztes Verhältnis kann auch mehr als zwey rationes componentes haben, weil man bisweilen zwey, drey und mehr mittlere Größen annehmen muß, um das Verhältnis zweyer Größen zu entdecken.

§. 111.

Weiß man das erste und letzte Glied in einer stetigen geometrischen Proportion, so läßt sich das mittlere finden, wenn man aus dem Producte dieser beyden Glieder die Quadratwurzel ziehet. Denn es sey das erste Glied einer stetigen Proportion 3 und das letzte 27, so muß das Product 3×27 d. i. 81 der Quadratzahl des mittlern Gliedes (§. 97.) und folglich die Quadratwurzel aus diesem Producte, nemlich 9 dem mittlern Gliede selbst gleich seyn. Es verhält sich auch in der That

$$3 : 9 = 9 : 27.$$

§. 112.

§. 112.

Werden in einer unstetigen Proportion die ersten drey Glieder gegeben, so findet man das vierte, wenn man das Product aus dem zweyten und dritten Gliede durch das erste Glied dividirt. Denn nennt man die drey ersten Glieder a, b, c und das letzte z, so ist

$$a \times z = b \times c \qquad \text{(§. 97.)}$$

$$\frac{a \times z}{a} = \frac{b \times c}{a} \qquad \text{(§. 18.)}$$

$$\text{d. i.} \quad z = \frac{b \times c}{a} \qquad \text{(§. 19.)}$$

Auf diesem Satze beruht die ganze Regel Detri, welche eben daher ihren Namen erhalten hat, weil sie zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das letzte finden lehrt. Es versteht sich daher von selbst, daß man sie nur in denjenigen Fällen anwenden kann, wo sich die Dinge wirklich in einem geometrischen Verhältnisse befinden.

§. 113.

Es sey die Einheit das erste, b das zweyte, und c das dritte Glied, so muß das vierte Glied $\frac{b \times c}{1}$ d. i. $b \times c$ seyn. Es verhält sich daher

$$1 : b = c : b \times c$$

d. h. die Einheit, der Multiplicandus, der Multiplicator und das Product machen allemal eine geometrische Proportion. Wäre nun das zweyte und dritte Glied einerley, z. E. b, so müßte das letzte Glied $\frac{b \times b}{1}$ d. i. b^2 seyn, und also

$$1 : b = b : b^2$$

d. h.

d. h. die Einheit, die Quadratwurzel und die Quadratzahl geben eine geometrische Proportion.

§. 114.

Es sey a das erste, b das zweyte und 1 das dritte Glied, so wird das vierte seyn $\frac{b \times 1}{a}$ d. i. $\frac{b}{a}$ (§. 112.) folglich

$$a : b = 1 : \frac{b}{a}$$

d. h. der Quotient ist die vierte geometrische Proportionalzahl zu dem Divisor, Dividendo und der Einheit.

§. 115.

Weil sich die Waaren und ihre Preise in einem geometrischen Verhältnisse befinden, wenn von einerley Waare und von einerley Zeit und Ort die Rede ist, so kann man durch Hülfe der Regel Detri aus dem gegebenen Preise einer gewissen Quantität Waare, den Preiß einer grössern oder kleinern Quantität von eben derselben Waare finden. Z. E. man verlangt zu wissen, wie viel man für 72 Ellen Leinwand zu bezahlen habe, wenn 3 Ellen 2 Thaler kosten? Hier würde man so schliessen können: Wie sich 3 Ellen zu 72 Ellen verhalten, so muß sich der Preiß von 3 Ellen, d. i. 2 Thlr. zu dem noch unbekannten Preiße von 72 Ellen verhalten, welcher also die vierte Proportionalzahl zu den drey bekannten Zahlen ist, und also gefunden werden kann:

3 Ellen

3 Ellen : 72 Ellen = 2 Thlr. :

$$3)\ \frac{144}{x}\ (48\ \text{Thlr.}$$

Insgemein schreibt man in der Ausübung dergleichen Exempel also:

3 Ellen — 2 Thlr. — 72 Ellen.

welche Proportion, aus den vorigen, die natürlicher ist, entstehen muß, wenn man die Glieder alternando nach §. 100. versetzt.

§. 116.

Man findet in den gewöhnlichen Rechenbüchern eine Menge Regeln, sonderlich in Ansehung der Vortheile, die sich bey der Regel Detri anbringen lassen. Man kann aber die meisten dieser Regeln entbehren, wenn man sich die Rechnungsarten sowohl mit ganzen, als auch mit gebrochenen Zahlen, und die nothwendigsten Lehrsätze von den Verhältnissen und Proportionen hinlänglich bekannt gemacht hat. So wird man z. E. aus dem 104. §. leicht einsehen, daß sich die größern Zahlen eines Exempels der Regel Detri in kleinere verwandeln lassen, die eben das Verhältnis haben, wenn man das erste und zweyte, oder das erste und dritte Glied durch einerley Zahl dividiren kann. Wir wollen uns also nur bey solchen Fällen noch aufhalten, bey denen ein Anfänger nicht gleich die Anwendung der bisher erklärten Sätze einsehen möchte. Daß sich die Regel Detri nur alsdenn anwenden läßt, wenn sich die Größen, von welchen die Rede ist, wirklich in einem geometrischen Verhältnisse befinden, ist schon oben §. 112. erinnert worden. Allein man muß, ehe

man

man zu rechnen anfängt, auch unterſuchen, in was für Ordnung ſolche Größen ein Verhältnis haben, damit man nicht die Proportion falſch ſchreibt; denn manche Dinge nehmen in eben dem Verhältnis zu, in welchem andre Dinge, die zu ihnen gehören, abnehmen, und von dieſen pflegt man zu ſagen, daß ſie ſich in einem umgewendeten Verhältnis befinden, woraus einige eine beſondere Gattung der Regel Detri, nemlich die ſogenannte **verkehrte Regel Detri** gemacht haben. Z. E. die Zahl der Arbeiter, die einen gewiſſen Bau in einem Jahre vollenden würden, verhält ſich nicht zu einer andern Anzahl von Arbeitern, die eben dieſen Bau in einem halben Jahre endigen könnten, wie die erſte Zeit zu der andern Zeit, ſondern umgewendet, wie die andre Zeit zu der erſten Zeit. Denn nimmt man noch einmal ſo viel Arbeitsleute, ſo braucht man nur halb ſo viel Zeit, nimmt man aber nur halb ſo viel Leute, ſo braucht man noch einmal ſo viel Zeit. Sollte man daher folgendes Exempel ausrechnen: 800 Soldaten können einen gewiſſen Feſtungsbau in 15 Monaten vollenden, wie viel würde man Soldaten nöthig haben, um dieſen Bau in 4 Monaten zu Stande zu bringen? ſo würde man alſo ſchlieſſen müſſen: Wie ſich verhält 4 Monat zu 15 Monat, ſo verhält ſich umgewendet die Anzahl der Soldaten, die man in 15 Monaten braucht, zu der Anzahl der Soldaten, die in 4 Monaten eben dieſe Arbeit verrichten können.

4 Mon. : 15 Mon. = 800 Sold. :

800

12000

4) 3000 Soldaten.

Nem-

Nemlich man hat 3000 Soldaten nöthig, um eben diesen Bau in 4 Monaten zu endigen.

§. 117.

Die Regula de quinque, welche in den Rechenbüchern ein besonder Capitel ausmacht, erfordert ebenfalls keine besondern Regeln, wenn man die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen inne hat; denn sie unterscheidet sich von der einfachen Regel Detri nur dadurch, daß in den dahin einschlagenden Exempeln zusammengesetzte Verhältnisse vorkommen. Man kann daher dergleichen Exempel entweder auf einmal rechnen, wenn man das verstanden hat, was §. 110. von den zusammengesetzten Verhältnissen gelehrt worden ist, oder so, daß man zwey Exempel der einfachen Regel Detri daraus machet. Z. E. wie viel betragen die Interessen von 1800 Thlr. in 15 Jahren, wenn man für 100 Thlr. in einem Jahr 6 Thlr. Interessen accordirt hat? Wenn man erwägt, daß die Interessen sich sowohl nach der Größe der Capitalien, als auch nach der Länge der Zeit richten, oder mathematisch zu reden, sich in einem zusammengesetzten Verhältnisse der Capitalien und Zeiten befinden, so wird man leicht einsehen, daß die Proportion nach §. 110. also geschrieben werden müßte, wenn man die unbekannten Interessen von 1800 Thlr. in 15 Jahren unterdessen y nennt.

6 Thlr. : y = 100 Thlr. : 1800 Thlr. + 1 Jahr : 15 Jahr.
d.i. 6 Thlr. : y = 100 × 1 : 1800 × 15
oder 100 × 1 : 1800 × 15 = 6 Thlr. : y.

Welche Proportion man in der Ausübung so zu schreiben pflegt, daß man die Zahlen, welche in einander multiplicirt werden sollen, unter einander setzt. Z. E.

100

100 Thlr. : 1800 Thlr.
1 Jahr : 15 Jahr = 6 Thlr. : y

100
90
18
27000
6
1620 Thlr. = y

Eben diese Zahl würde man auch erhalten, wenn man erst untersuchte, wie viel die Interessen von 1800 Thlr. in einem Jahre betrügen. Denn nimmt man einerley Zeit an, so müssen sich die Interessen bloß wie die Capitalien verhalten. Folglich

100 Thlr. : 1800 Thlr. = 6 Thlr. :
6
108 Thlr.

Geben nun 1800 Thlr. in einem Jahr 108 Thlr. Interessen, so müssen sie in 15 Jahren, 15 mal so viel geben, oder

1 Jahr : 15 Jahr = 108 Thlr. :
15
540
108
1620 Thlr.

§. 118.

In der Gesellschafts-Rechnung hat man weiter nichts zu merken, als daß man die Regel Detri so vielmal anwenden muß, als Mitglieder in derjenigen Gesellschaft sind, unter welche ein gewisser Gewinnst nach dem Verhältnisse ihrer Einlage getheilt werden soll. Z. E. eine Gesellschaft von drey Kaufleuten, wovon

wovon der erste 8000 Thlr. der andre 7000 Thlr. und der dritte 5000 Thlr. zu einer gemeinschaftlichen Handlung vorgeschossen hat, gewinnt in einer gewissen Zeit 60000 Thlr. es fragt sich daher, wie viel ein jeder von dem Gewinnste erhalten müsse? Da es unbillig wäre, wenn derjenige, der ein kleines Capital zur Handlung hergegeben, eben so viel von dem Gewinnste erhielte, als ein andrer, dessen Capital viel grösser gewesen, so ist leicht einzusehen, daß der Gewinnst nach dem Verhältnis der vorgeschossenen Capitalien ausgetheilt werden muß. Es läßt sich also der Gewinnst eines jeden bestimmen, wenn man alle drey Capitalien zusammen addirt, und folgendergestalt schließt: wie sich die ganze Summe, womit gehandelt worden ist, zu dem ganzen Gewinnste verhält, so verhält sich auch das Capital eines jeden Mitglieds zu seinem Antheile von dem Gewinnste.

Das Capital des ersten	8000 Thlr.
Das Capital des andern	7000 Thlr.
Das Capital des dritten	5000 Thlr.
Summe	20000 Thlr.

2øøøø Thlr. : 6øøøø Thlr. = 8000 Thlr. : Gew. des 1sten

6

48000

2) 24000 Thlr. Gew. des 1sten

2øøøø Thlr. : 6øøøø Thlr. = 7000 Thlr. : Gew. des 2ten

6

2) 42000

21000 Thlr. Gew. des 2ten

2øøøø Thlr. : 6øøøø Thlr. = 5000 Thlr. : Gew. des 3ten

6

2) 30000

15000 Thlr. Gew. des 3ten

Probe:

24000 Thlr. Gew. des 1sten
21000 Thlr. Gew. des 2ten
15000 Thlr. Gew. des 3ten

60000 Thlr.

§. 119.

Auf die vorige Art werden auch verschiedene andre Exempel gerechnet, wo Dinge nach einem gewissen Verhältnisse vermischt werden müssen, wenn sie eine verlangte Wirkung thun sollen. Z. E. wenn man 100 Pf. Salpeter, 18. Pf. Schwefel und 20 Pf. Kohlen, nachdem diese Materien fein zerrieben worden, unter einander mengt, so erhält man Schießpulver. Es fragt sich, wie viel man von jeder Sache nehmen müsse, um nur 5 Pf. Schießpulver zu machen? Diese Rechnung, deren Erklärung überflüßig seyn würde, weil sie einerley Grund mit der vorigen hat, läßt sich folgendergestalt anstellen:

100 Pf. Salpeter.
18 Pf. Schwefel.
20 Pf. Kolen.

138 Pf.

138 Pf. : 5 Pf. = 100 Pf. :

5

138) 500 (3 Pf.

414

86

32

172

258

138) 2752 (19 $\frac{130}{138}$ Loth.

138

1372

1242

130

138 Pf. : 5 Pf. = 18 Pf. :

5

90

32

180

270

138) 2880 (20 $\frac{120}{138}$ Loth.

276

120

138 Pf. : 5 Pf. = 20 Pf. :

5

100

32

138) 3200 (23 $\frac{26}{138}$ Loth.

276

440

414

62

Probe:

3 Pf.	19.	$\frac{130}{138}$	Loth	Salpeter.
—	20.	$\frac{120}{138}$	—	Schwefel.
—	23	$\frac{26}{138}$	—	Kolen.
5 Pf.	—			

Sechstes Capitel.

Von den Progreßionen und Logarithmen.

§. 120.

Man nennt eine Reihe Zahlen, die nach einerley Geſetz wachſen oder abnehmen, eine **Progreßion**. Beſtehet dieſes Geſetz darinnen, daß jede zwey Zahlen, die unmittelbar auf einander folgen, einerley **Unterſchied** haben, ſo nennt man eine ſolche Reihe eine **arithmetiſche Progreßion**, weil ſie lauter arithmetiſche Verhältniſſe enthält, und als eine Fortſetzung einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion angeſehen werden kann. Z. E. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. Iſt aber das allgemeine Geſetz, nach welchem die Zahlen zunehmen oder abnehmen, dieſes, daß überall einerley **Quotient** entſteht, wenn ein Paar auf einander folgende Glieder durch einander dividirt werden, ſo heißt die Progreßion **geometriſch**, weil ſie aus lauter geometriſchen Verhältniſſen beſteht, und als eine fortgeſetzte ſtetige geometriſche Proportion angeſehen werden kann. Z. E. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. Der Quotient, welchen

chen man erhält, wenn man ein Glied durch das folgende oder vorhergehende dividirt, wird daher auch der **Exponent der Progreßion** genannt. Eine Progreßion heißt **steigend**, (progreſſio adſcendens) wenn die folgenden Glieder größer ſind, als die vorhergehenden, und **fallend**, (progreſſio deſcendens) wenn ſie kleiner ſind. Eine ſteigende arithmetiſche Progreßion wird daher gemacht, wenn man den Unterſchied zu dem vorhergehenden Gliede addirt; und eine ſteigende geometriſche, wenn man den Exponenten in das vorhergehende multiplicirt. Eine fallende arithmetiſche Progreßion hingegen entſteht, wenn man den Unterſchied von dem vorhergehenden Gliede ſubtrahirt; und eine fallende geometriſche, wenn man das vorhergehende Glied durch den Exponenten dividirt.

§. 121.

Wenn man die Erklärung einer arithmetiſchen Progreßion überlegt, ſo wird man von ſelbſt einſehen, daß nicht nur diejenigen Glieder einer ſolchen Progreßion, die unmittelbar auf einander folgen, ſondern auch diejenigen, die gleich weit von einander abſtehen, einerley arithmetiſches Verhältnis haben müſſen. Man vergleiche z. E. in der folgenden Progreßion.

1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 .

Das erſte Glied 1 mit dem vierten Gliede 10; ferner das zweyte Glied 4 mit dem fünften Gliede 13, welche beyde eben ſo weit von einander abſtehen, als die vorigen 1 und 10, ſo wird man finden, daß

1 . 10 = 4 . 13

Denn weil 13 von 4 eben so weit absteht, als 10 von 1, so muß auch 13 aus 4 auf eben die Art entstehen, wie 10 aus 1. Nun entsteht aber hier das Glied 10 aus dem Gliede 1, weil jenes um 3 Stellen von diesem absteht, indem man die Differenz 3 zu dem Gliede 1 dreymal addirt; folglich muß auch das Glied 13 aus dem Gliede 4 durch dreymalige Addition der Differenz 3 entstehen, und daher zwischen diesen beyden eben der Unterschied seyn, als zwischen den vorigen Gliedern 1 und 10 ist.

§. 122.

Eben so leicht läßt sich aus dem Begriffe einer geometrischen Progreßion einsehen, daß nicht nur die Glieder, die unmittelbar auf einander folgen, sondern auch diejenigen, die gleich weit von einander abstehen, einerley geometrisches Verhältnis haben müssen, weil diejenigen Glieder, die gleich weit von einander abstehen, auf einerley Art durch die Multiplication oder Division aus einander gemacht werden. Z. E. in der geometrischen Progreßion

1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 .

verhält sich nicht nur

1 : 2 = 4 : 8

sondern auch

1 : 8 = 2 : 16

oder

2 : 32 = 4 : 64

oder

4 : 32 = 16 : 128

§. 123.

Verbindet man eine geometrische Progreßion, deren erstes Glied 1 ist, und eine arithmetische, die sich mit 0 anfängt, und zum Unterschiede der Glieder 1 hat, dergestalt mit einander, daß man zu jedem Gliede der geometrischen ein Glied der arithmetischen Progreßion setzt, so werden die Glieder der arithmetischen Progreßion **Logarithmen**, von den correspondirenden Gliedern der arithmetischen genannt. Z. E.

Geom. Pr.	1	2	4	8	16	32	64	128
Arithm. Pr.	0	1	2	3	4	5	6	7

Hier ist also 3 der Logarithmus von 8, und 4 der Logarithmus von 16, u. s. f. Die Ursache dieser Benennung ist folgende: Weil sich die arithmetische Progression mit Null anfängt, und der Unterschied der Glieder 1 ist, so zeigen die Glieder der arithmetischen Progression die Anzahl der Verhältnisse in der geometrischen Progreßion an. Der Logarithmus von 1 ist daher 0, weil ein einziges Glied kein Verhältnis ausmacht. Der Logarithmus von 2 ist 1, weil man bey 2 Gliedern ein Verhältnis in der geometrischen Progreßion zählen kann. Der Logarithmus von 4 ist 2, weil es von 1 bis zur 4 zwey Verhältnisse in dieser Reihe giebt, u. s. f. Man hat daher die Glieder der arithmetischen Progreßion die **Zahlen der Verhältnisse** genannt, denn dieses will das griechische Wort **Logarithmus** eigentlich sagen, welches aus den Wörtern λογος, ein Verhältnis, und ἀριθμος eine Zahl, zusammengesetzt ist. Das Zeichen, wodurch man die Logarithmen anzeigt, ist entweder der Buchstabe l. oder die Abbreviatur log. Der Ausdruck l. 32 oder log.

$32 = 5$ heißt also nichts anders, als daß 5 der Logarithmus der Zahl 32 ist.

§. 124.

Erwählt man eine andre geometrische Progression, so müssen die Glieder der arithmetischen Progreßion nothwendig Logarithmen von andern Zahlen werden. Z. E.

Geom. Pr.	1 .	3 .	9 .	27 .	81 .	243 .
Logar.	0 .	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .

Hier ist also die Zahl 4, welche vorhin der Logarithmus von 16 war, der Logarithmus von 81. u. s. f. Da man sich nun eine unendliche Anzahl von geometrischen Progreßionen vorstellen kann, so ist klar, daß jede Zahl der Logarithmus von einer unendlichen Menge Zahlen seyn könne. Wird aber eine gewisse geometrische Progreßion bestimmt, so kann ein Logarithmus nur einer einzigen Zahl zugehören. Wir wollen uns jetzt unterdessen, damit die folgenden Sätze durch Beyspiele erläutert werden können, wieder diejenige geometrische Progreßion erwählen, deren Exponent 2 ist, und neben jede Zahl ihren Logarithmum setzen.

Zahlen.	Logarithmen.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20
2097152	21 u. f. f.

§. 125.

Wenn die Glieder in der geometrischen Progreßion unmittelbar auf einander folgen, oder gleich weit von einander abstehen, so müssen auch die dazu gehörigen Logarithmen entweder unmittelbar auf einander folgen, oder einerley Abstand von einander haben. Da nun sowohl in einer arithmetischen, als auch in einer geometrischen Progreßion die unmittelbar auf einander folgenden oder gleich weit von einander abstehenden Glieder eine Proportion ausmachen, so ist klar, daß die Logarithmen solcher Größen oder Zahlen, die geometrisch propor-

tional sind, sich in einer arithmetischen Proportion befinden müssen. Wenn daher

$$\frac{b : g = a : m \text{ so folgt, daß}}{\log. b \cdot \log. g. = \log. a \cdot \log. m}$$

oder wenn

$$\frac{4 : 32 = 2 : 16}{\log. 4 \cdot \log. 32 = \log. 2 \cdot \log. 16.}$$

d. i. $2 \cdot 5 = 1 \cdot 4$ (§. 124.)

Und weil man aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das 4te findet, wenn man das zweyte zu dem dritten addirt, und von dieser Summe das erste abzieht, (§. 93.) so muß man den Logarithmum der vierten geometrischen Proportional-Größe erhalten, wenn man die Logarithmen des zweyten und dritten Gliedes zusammen addirt, und hiervon den Logarithmum des ersten Gliedes abzieht. Man kann daher durch Hülfe der Logarithmen die Exempel der Regel Detri ohne Multipliciren und Dividiren rechnen, wenn man eine Tabelle besitzt, worinnen die Logarithmen derjenigen Zahlen befindlich sind, die als Glieder der Proportion vorkommen. Wir wollen z. E. zu 12, 16 und 256 durch Hülfe der Logarithmen die vierte geometrische Proportionalzahl suchen, oder welches eben dieselbe Rechnung in benannten Zahlen ist, wir wollen den Preis von 256 Ellen bestimmen, der unterdessen x heissen soll, wenn 2 Ellen 16 Thlr. kosten. Weil nun hieraus folgende Proportion entsteht:

2 Ellen

2 Ellen : 256 Ellen = 16 Thlr. : x

so ist log. x = log. 256 + log. 16 — log. 2.

Nun ist log. 256 = 8
log. 16 = 4) (§. 124.)

log. 256 + log. 16 = 12
log. x = 1 (§. 124.)

log. x = log. 256 + log. 16 — log. 2 = 12 — 1 = 11

Aus dieser Rechnung ersieht man, daß der Logarithmus von der verlangten Zahl x 11 ist. Sucht man nun diesen Logarithmum in der Tabelle §. 124. auf, so findet man, daß es der Logarithmus von 2048 ist, welches also die vierte Proportionalzahl, die verlangt wird, seyn muß. Nemlich 256 Ellen würden unter der vorigen Bedingung 2048 Thaler kosten.

§. 126.

Aus dem vorigen Hauptsatze läßt sich auch dieser leicht einsehen, daß der **Logarithmus eines Products entsteht, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.** Heissen also die Factores b und c, so ist

log. b × c = log. b + log. c.

Denn

1 : b = c : b × c (§. 113.)

log. b × c = log. b + log. c — log. 1. (§. 125.)

log 1 = 0 (§. 123.)

log. b × c = log. b + log. c

Sollten also die Zahlen 8192 und 128 in einander multiplicirt werden, so könnte man dieses Product durch Hülfe der Logarithmen finden, wenn man die Logarithmen dieser beyden Zahlen zusammen addirte, und diese Summe in der logarithmischen Tabelle aufsuchte.

ſuchte. Die dazu gehörige Zahl müßte das verlangte Product ſeyn

log. 8192 = 13
log. 128 = 7) (§. 124.)

log. 8192 × 128 = 13 + 7 = 20
20 = log. 1048576 (§. 124.)

8192 × 128 = 1048576 (§. 11.)

Daß auch wirklich 1048576 das wahre Product der beyden Zahlen 8192 und 128 ſey, können Anfänger durch die gewöhnliche Multiplication unterſuchen.

8192
128
65536
16384
8192
1048576

§. 127.

Weil eine Quadratzahl nichts anders iſt, als ein Product, das aus zwey gleichen Factoren beſteht, (§. 68.) ſo muß der Logarithmus einer Quadratzahl noch einmal ſo groß ſeyn, als der Logarithmus der Wurzel; und der Logarithmus der Wurzel halb ſo groß, als der Logarithmus der Quadratzahl. Denn iſt z. E. a die Wurzel und a × a das Quadrat, ſo iſt

log. a × a = log. a + log. a (§. 126.)
d. i. log. a^2 = 2 log. a

$\frac{\log. a^2}{2} = \frac{2 \log. a}{2}$ (§. 18.)

d. i. $\frac{1}{2}$ log. a^2 = log. a (§. 19.)

Soll man alſo 1024 zum Quadrat erheben, ſo ſuche man

man den Logarithmum von dieser Zahl, welcher nach unserm unterdessen angenommenen System 10 ist, (§. 124.) das zweyfache davon nemlich 20, als den Logarithmum des Quadrats, suche man unter den Logarithmen, so muß die dazu gehörige Zahl, nemlich 1048576 (§. 124.) die verlangte Quadratzahl seyn. Verlangt man aber die Quadratwurzel aus 1024, so halbire man den Logarithmum 10, und suche den halben Logarithmum 5 in der Tabelle, so wird die Zahl 32, wovon 5 der Logarithmus ist, die Quadratwurzel aus 1024 seyn.

§. 128.

Weil eine Cubikzahl entsteht, wenn man eine Quadratzahl in die Wurzel multiplicirt, so muß der Logarithmus einer Cubikzahl dreymal so groß, als der Logarithmus der Cubikwurzel, und der Logarithmus einer Cubikwurzel der dritte Theil von dem Logarithmo der Cubikzahl seyn. Denn es sey a die Cubikwurzel, so ist

$a^2 \times a = a^3$ (§. 80.)

log. $a^2 \times a$ = log. a^2 + log. a. (§. 126.)

log. a^2 = 2 log. a (§. 127.)

log. $a^2 \times a$ = 2 log. a + log. a (§. 9.)

d. i. log. a^3 = 3 log. a

$\frac{\log. a^3}{3} = \frac{3 \log. a}{3}$ (§. 18.)

d. i. $\frac{1}{3}$ log. a^3 = log. a (§. 19.)

Soll also z. E. aus 2097152 die Cubikwurzel gesucht werden, so nehme man den dritten Theil von dem Logarithmo dieser Zahl, d. i. von 21. (§. 124.) und suche dieses drittel, d. i. 7 unter den Logarithmen,

so

ſo muß die dazu gehörige Zahl 128 die Cubikwurzel von 2097152 ſeyn. Umgewendet würde man 128 zur Cubikzahl erheben, wenn man ihren Logarithmum 7 dreymal nähme, und dieſe dreyfache Sieben, d. i. 21 unter den Logarithmen aufſuchte.

§. 129.

Der Logarithmus eines Quotienten wird gefunden, wenn man den Logarithmum des Diviſors von dem Logarithmo des Dividendi ſubtrahirt. Es ſey z. E. b der Dividendus, und a der Diviſor, ſo iſt

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b - \log. a$$

Denn

$$a : b = 1 : \frac{b}{a} \qquad (§. 114.)$$

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b + \log. 1 - \log. a \quad (§. 125.)$$

$$\log. 1 = 0 \qquad (§. 123.)$$

$$\log. \frac{b}{a} = \log. b - \log. a$$

Sollte alſo die Zahl 524288 durch 2048 dividirt werden, ſo könnte man den Quotienten ohne Diviſion entdecken, wenn man nur ſeinen Logarithmum ſuchte; Dieſen aber würde man finden, wenn man den Logarithmum der Zahl 2048 von dem Logarithmo der Zahl 524288, d. i. 11 von 19 ſubtrahirte. (§. 124.) Iſt nun 19 — 11, d. i. 8 der Logarithmus des Quotienten, ſo muß die dazu gehörige Zahl 256 der Quotient ſelbſt ſeyn, wovon ſich auch Anfänger durch die gewöhnliche Diviſion überzeugen können.

2048)

2048) 524288(256
4096
11468
10240
12288
12288
0

§. 130.

Weil man die Brüche als Quotienten ansehen kann, und alsdenn der Zähler eines Bruchs der Dividendus, und der Nenner desselben der Div:sor wird, (§. 46.) so folgt hieraus, daß der **Logarithmus eines Bruchs entstehet, wenn man den Logarithmum des Nenners von dem Logarithmo des Zählers subtrahirt.** Ist nun der Bruch ein wahrer Bruch, so muß der Nenner grösser seyn, als der Zähler, (§. 47.) und folglich auch der Logarithmus des Nenners grösser, als der Logarithmus des Zählers. Da nun durch die Subtraction einer grössern Zahl von einer kleinern nothwendig eine negative Differenz entsteht, (§. 30.) so ist klar, daß die Logarithmen aller wahren Brüche negativ oder verneinend seyn müssen. z. E.

$$\log. \tfrac{2}{4} = \log. 2 - \log. 4$$
$$\log. 2 - \log. 4 = 1 - 2 \quad (\S. 124.)$$
$$\log. \tfrac{2}{4} = 1 - 2 = -1 \quad (\S. 30.)$$

§. 131.

Aus den bisher angeführten Sätzen wird man also leicht die Vortheile erkennen, welche die Logarithmen im Rechnen verschaffen, indem sie das beschwerliche Multipliciren und Dividiren in Addiren und Subtrahiren verwandeln, auch die Quadrat- und Cubik-

Cubikwurzel auf eine leichte Art finden lehren. Dieser Vortheile aber kann man sich nur alsdenn bedienen, wenn man eine Tabelle bey der Hand hat, welche die Logarithmen aller derjenigen Zahlen enthält, die in den gewöhnlichen Rechnungen vorzukommen pflegen. Diejenige Tabelle also, welche §. 124. in der Geschwindigkeit aufgesetzt worden ist, damit wir die Hauptsätze der Logarithmen durch Beyspiele erläutern könnten, würde zu dieser Absicht nicht hinlänglich seyn, indem darinnen die Logarithmen der meisten Zahlen fehlen. Man hat daher durch sehr mühsame Rechnungen, die sich hier nicht erklären lassen, diesem Mangel einigermassen abzuhelfen gesucht, wie man aus den gedruckten Tabellen ersehen kann, wovon diejenigen die gewöhnlichsten und wohlfeilsten sind, welche **A. Vlacq** und der Baron von Wolff herausgegeben haben. Man hat aber in diesen Tabellen, nicht die oben §. 124. angenommene geometrische Progreßion, sondern folgende, 1, 10, 100, 1000, u. s. f. gewählet. Wenn man nun hierzu die arithmetische Progreßion setzt, die sich mit 0 anfängt, und zum Unterschiede der Glieder 1 hat,

1 .	10 .	100 .	1000 .	10000 .	100000 .	
0 .	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	

so ist offenbar, daß 1 der Logarithmus von 10, ferner 2 der Logarithmus von 100, u. s. f. in diesem System seyn muß. Alle Zahlen also, die zwischen 1 und 10 fallen, haben zum Logarithmo einen wahren Bruch, weil ein solcher Logarithmus zwischen 0 und 1 fallen, folglich grösser als nichts, und kleiner als die Einheit seyn muß. Die Zahlen zwischen 10 und 100 haben zum Logarithmo die Einheit nebst einem Bruche; die Zahlen zwischen 100 und 1000 haben

zum

zum Logarithmo die Zahl 2 nebst einem Bruche u. s. f. In den gewöhnlichen kleinen Tafeln hat man diesen Bruch bis auf sieben Decimalstellen, und in den größern Tafeln noch genauer ausgerechnet. Diejenige Zifer in einem Logarithmo, welche ganze Zahlen bedeutet, pflegt man die Kennzifer oder Characteristik zu nennen. So ist z. E. in dem Logarithmo von $54 = 1.7323938$ die Kennzifer 1, und die übrigen Zifern, die nach dem Puncte folgen, Decimalbrüche. In dem Logarithmo von $2677 = 3.4276184$ ist die Kennzifer 3, u. s. f.

§. 132.

Damit Anfänger die gedruckten Tabellen recht gebrauchen lernen, so wird es nichts überflüßiges seyn, uns noch ein wenig bey dieser Materie aufzuhalten, zumal, da sehr oft Zahlen und Logarithmen vorkommen, die man in den gewöhnlichen Tabellen nicht antrift, und die man doch durch eine leichte Rechnung entdecken kann, wenn man sich folgende Sätze hinlänglich bekannt macht: Erstlich läßt sich schon aus der Betrachtung der angenommenen geometrischen Progreßion, die zum Exponenten 10 hat, unmittelbar einsehen, daß der Logarithmus um eine ganze Einheit zunimmt, wenn die Zahl zehnmal gröſſer, daß der Logarithmus um 2 Einheiten zunimmt, wenn die Zahl hundertmal grösser gemacht wird, u. s. f. Denn der Logarithmus von 10 ist 1, der Logarithmus von 100 ist 2, u. s. w. Hieraus folgt also, daß man die Kennzifer eines Logarithmen um so viel Einheiten vermehren müsse, als man zu der correspondirenden Zahl rechter Hand Nullen gesetzt habe,

ohne die Decimalbrüche im geringsten zu verändern. Z. E. vermöge der Tabellen ist

log. 67 = 1. 8260748

man kann daher ohne Tabellen die Logarithmen von 670, von 6700, von 67000 u. s. f. wissen. Nemlich

log. 670 = 2. 8260748
log. 6700 = 3. 8260748
log. 67000 = 4. 8260748

Wer noch einen Zweifel an diesem Satze haben sollte, der kann sich von der Wahrheit desselben auf folgende Art überzeugen.

log. 67 = 1. 8260748
log. 10 = 1. 0000000 (§. 131.)

log. 67 × 10 = 2. 8260748 (§. 126.)

d. i. log. 670 = 2. 8260748

Ferner

log. 67 = 1. 8260748
log. 100 = 2. 0000000 (§. 131.)

log. 6700 = log. 67 × 100 = 3. 8260748 u. s. w.

§. 133.

Wenn man daher die Kennzifer eines Logarithmen vermindert, und die Decimalbrüche unverändert läßt, so müssen in der dazu gehörigen Zahl, wofern sie Nullen enthält, rechter Hand so viel Nullen wegfallen, als man Einheiten in der Kennzifer des Logarithmen weggenommen hat. Enthält die Zahl aber keine Nullen, so müssen eben so viel Zifern, von der Rechten gegen die Linke zu gerechnet, Decimalbrüche werden, und so auch umgewendet. Z. E.

3. 9590414 ist der Logarithmus von 9100

folglich ist 2. 9590414 der Logarithmus von 910
und 1. 9590414 der Logarithmus von 91

ferner

ferner

3. 9173479 iſt der Logarithmus von 8267

folglich iſt 1. 9173479 der Logarithmus von 82, 67
und 0. 9173479 der Logarithmus von 8, 267

Die Urſache davon iſt folgende:

Erſtlich

3. 9590414 = log. 9100
1. 0000000 = log. 10 (§. 131.)

$$2.9590414 = \log.\frac{9100}{10} = \log. 910 \text{ (§. 129.)}$$

oder

3. 9590414 = log. 9100
2. 0000000 = log. 100 (§. 131.)

$$1.9590414 = \log.\frac{9100}{100} = \log. 91 \text{ (§. 129.)}$$

Ferner

3. 9173479 = log. 8267
2. 0000000 = log. 100

$$1.9173479 = \log.\frac{8267}{100} = \log. 82,67 \text{ (§. 129.)}$$

oder

3. 9173479 = log. 8267
3. 0000000 = log. 1000

$$0.9173479 = \log.\frac{8267}{1000} = \log. 8,267. \text{ (§. 129.)}$$

Man kann alſo von den vermiſchten Zahlen, wenn ſie Decimalbrüche enthalten, und nicht allzugroß ſind, die Logarithmen aus den Tabellen ſehr leicht finden, obgleich nur die Logarithmen der ganzen Zahlen angegeben ſind, wenn man alle Zifern als ganze Zahlen betrachtet, von dieſer Zahl den Logarithmum auf-

sucht, und hernach in der Kennzifer desselben so viel Einheiten wegstreicht, als man Decimalbrüche in der vermischten Zahl antrift. z. E. es sey der Logarithmus von 5,67 zu suchen. Man nehme aus den Tabellen den Logarithmum von 567, nemlich 2.7535831. Da nun in der gegebenen Zahl zwey Zifern Decimalbrüche bedeuten, so nehme man zwey Einheiten aus der Kennzifer des Logarithmi hinweg, wodurch man zur Kennzifer Null, und zum Logarithmo von 5,67 folgenden

0. 7535831

erhalten muß.

§. 134.

Wenn man die Unterschiede der Logarithmen, und die Unterschiede der Zahlen, zu denen sie gehören, mit einander vergleicht, so findet man, daß die Unterschiede der Logarithmen sich beynahe eben so verhalten, wie die Unterschiede der Zahlen. Bey den kleinen Zahlen ist dieser Satz merklich falsch, bey den grössern aber, sonderlich bey denen, die über 8000 betragen, ist der Fehler oft so geringe, daß man ihn kaum entdecken kann, daher man sich desselben fleißig zu bedienen pflegt, wenn man Logarithmen von Zahlen wissen will, die sich nicht in den gewöhnlichen Tabellen befinden. Wir wollen zuerst den Satz bey kleinern, und hernach auch bey grössern Zahlen prüfen.

log.	669	=	2. 8254261
log.	668	=	2. 8247765
Unterſch. der Zahlen. 1		Unterſch. der Log.	6496

log.	669	=	2. 8254261
log.	665	=	2. 8228216
Unterſch. der Zahlen. 4		Unterſch. der Log.	26045

Nun

Nun wollen wir versuchen, ob sich die Unterschiede der Zahlen 1 und 4 eben so verhalten, wie die Unterschiede ihrer Logarithmen, 6496 und 26045. In dem Verhältnisse 1 : 4 ist der Exponent 4. in dem Verhältnisse 6496 : 26045 aber $4\frac{61}{6496}$, und also um $\frac{61}{6496}$ grösser, als der vorige. Folglich werden in diesem Falle die Unterschiede der Zahlen, und die Unterschiede ihrer Logarithmen nicht die richtigste Proportion geben. Laßt uns daher sehen, ob der Fehler bey grössern Zahlen eben so beträchtlich seyn wird.

log.	8236	=	3. 9157163
log.	8235	=	3. 9156636
Unterſch. der Zahlen 1		Unterſch. der Log.	527
log.	8236	=	3. 9157163
log.	8234	=	3. 9156109
Unterſch. der Zahlen 2		Unterſch. der Log.	1054

Hier haben die Unterschiede der Zahlen 1 und 2 völlig eben das Verhältnis, wie die Unterschiede ihrer Logarithmen 527 und 1054. Denn

1 : 2 = 527 : 1054

weil in beyden Verhältnissen der Exponent 2 ist.

§. 135.

Durch Hülfe des vorigen Satzes lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen, die man in den gewöhnlichen Tabellen nicht antrift, ohne weitläuftige Rechnung finden, wenn sie auch nicht durch die Multiplication ganzer Zahlen entstanden sind, als in welchem Falle man nur die Logarithmen der Factoren addiren darf; (§. 126.) In den kleinen Tabellen sind nur die Logarithmen von 1 bis 10000 enthalten. Gesetzt nun, man hätte den Logarithmum von 86759

nöthig, so könte man denselben, ohne einen sonderlichen Fehler zu begehen, folgendergestalt finden. Man lasse zuerst die letzte Zifer von dieser Zahl rechter Hand weg, um eine Zahl zu erhalten, von welcher man den Logarithmum in den Tabellen noch findet. Bestünde die gegebene Zahl aus 6 Zifern, so müste man davon 2, bestünde sie aus 7 Zifern, 3, u. s. w. weglassen. Sowohl von der Zahl 8675, als auch von der nächst grössern 8676 suche man die Logarithmen, und mache daraus die Logarithmen von 86750 und 86760, (§. 132.) zwischen welche der verlangte Logarithmus von 86759 fallen muß. Nun subtrahire man sowohl die Zahlen, als auch ihre Logarithmen, und schliesse: wie sich verhält der Unterschied der ersten und dritten Zahl zu dem Unterschiede der andern und dritten, so verhält sich auch der Unterschied des ersten und dritten Logarithmi, zu dem Unterschiede des unbekannten andern und dritten Logarithmi. Hat man nun durch die Regel Detri diesen Unterschied, den wir Z nennen wollen, gefunden, so braucht man nichts weiter zu thun, als ihn zu dem kleinern Logarithmo zu addiren, um den gesuchten Logarithmum zu erhalten.

log. 8675	=	3. 9382695	
log. 86750	=	4. 9382695	(§. 132.)
log. 8676	=	3. 9383195	
1) log. 86760	=	4. 9383195	
3) log. 86750	=	4. 9382695	
Unterſch. der Zahlen 10		Unterſch. der Log. 500	
2) log. 86759	=	. . . . .	
3) log. 86750	=	4. 9382695	
Unterſch. der Zahlen 9		Unterſch. der Logar. Z	

10:

$$10 : 9 = 50 : z$$

$$\frac{9}{450 = z}$$

log. 86750 = 4. 9382695

z 450

log. 86759 = 4. 9383145

§. 136.

Auf eben die Art kann man auch zu einem Logarithmo, der grösser ist, als die Logarithmen in den gewöhnlichen Tabellen, die dazu gehörige Zahl finden. Es sey z. E. der Logarithmus 4. 9383145 gegeben, und man verlangt die dazu gehörige Zahl zu wissen. Man suche erstlich diesen Logarithmum unter einer kleinern Kennzifer, z. E. unter der Kennzifer 3 in den Tabellen, und wenn man keinen Logarithmum findet, der eben diese Decimalbrüche hat, so nehme man sowohl den nächst kleinern, als auch den nächst grössern, und mache die Kennzifer eines jeden so groß, als die Kennzifer des gegebenen Logarithmi ist, zu den Zahlen aber setze man so viel Nullen rechter Hand, als man Einheiten zu der Kennzifer des Logarithmi gesetzt hat. (§. 132.) Hierauf ziehe man den nächst kleinern Logarithmum von dem nächst grössern, so wie auch die dazu gehörigen Zahlen von einander ab. Ferner subtrahire man den nächst kleinern Logarithmum von dem gegebenen, und suche zu den beyden Unterschieden der Logarithmen, und dem Unterschiede der Zahlen die vierte Proportional-Zahl, wie folgende Rechnung zeiget.

Der nächst kleinere Logarithmus unter der Kennzifer 3 ist vermöge der Tabellen:

3. 9382695 = log. 8675

folglich 4. 9382695 = log. 86750 (§. 132.)

Der nächst grössere Logarithmus ist:

	3. 9383195	=	log. 8676	
folglich	4. 9383195	=	log. 86760	(§. 132.)
subtr.	4. 9382695	=	log. 86750	
Unterſch. der Log. 500			Unterſch. der Zahlen 10	

der gegebene Log.	4. 9383145	=	. . . . .
der nächst kleinere	4. 9382695	=	log. 86750
Unterſchied der Logarithm. 450			Unterſch. der Zahlen X

$$5\text{ø}\text{ø} : 45\text{ø} = 1\text{ø} : X \quad (\S.\ 134.)$$
$$5)\ 9 = X$$

Da nun 9 der Unterſchied zwiſchen der bekannten kleinern Zahl 86750 und der unbekannten grössern Zahl iſt, ſo muß die geſuchte Zahl ſelbſt 86750 + 9 das iſt 86759 ſeyn.

Anhang
von den üblichsten
Münzen, Maaße und Gewichte.

I. Von den Münzen. (*)

1. Goldmünzen.

Ein alter Louis d'or, Friedrichs d'or oder Piſtolette gilt	5 Thaler.
Ein Louis neuf oder Schild-Louis d'or, welcher 24 Livres enthält, ingleichen eine Caroline	6 Th. 4 bis 6 Gr.
Ein Holländ. und Oeſterr. Ducaten	2 Th. 20 Gr.
Ein Däniſcher Ducaten	2 Th. 6 bis 7 Gr.
Ein Venetianiſcher Ducaten Cour.	1 Th. 2 Gr.
Ein Imperial, eine Rußiſche Münze, die 10 Rubeln beträgt,	12 Th. 12 bis 14 Gr.
Eine Guinee, eine Engl. Münze, welche 21 Schillinge enthält,	6 Th. 7 bis 10 Gr.
Ein Severin, Oeſterr. Münze,	8 Th. 8 bis 10 Gr.
Eine Zechine, Venet. Geld,	2 Th. 12 Gr.

2. Silbermünzen.

Ein Species-Thaler	1 Thaler 8 Groſchen

*) Der Werth der fremden Münzen wird nach Conventionsgelde beſtimmt. Da aber das Verhältnis der verſchiedenen Münzſorten gegen einander nicht beſtändig einerley bleibt, ſo dürfen ſich Anfänger nicht wundern, wenn ſie in andern Verzeichniſſen den Werth einer fremden Münze bald kleiner, bald gröſſer finden.

Ein Thaler, oder sogenannter Reichs-Thaler		24 gute Gr.
	oder	30 Kayser Gr.
	oder	36 Marien Gr.
	oder	5 Tümpfe
	oder	90 Preußische Gr.
Ein Meißnischer Gülden		21 Gr.
Ein Kayser-Gulden		16 Gr.
	oder	20 Kayser Gr.
Ein Preußischer Gulden		8 gute Gr.
	oder	30 Preuß. Gr.
Ein Pohlnischer Gulden		4 gute Gr.
Eine Mark, in Niedersachsen		8 bis 9 Gr.
Ein Orthsthaler		6 Groschen
Ein Tümpf		4 Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.
	oder	18 Preuß. Gr.
Ein ganzer Batzen		16 Pf.
Ein Groschen, der auch ein guter Groschen genannt wird,		12 Pf.
	oder	3 gute Kreutzer
	oder	5 Schlesische Gröschel
Ein Kayser-Groschen		3 Kayser Kreutzer
	oder	4 Schlesische Gröschel
Ein Marien-Groschen		8 Pf.
Ein Albus		7 Pf.
Ein Schilling in Niedersachsen		6 bis 7 Pf.
Ein guter Kreutzer		4 Pf.
Ein Kayser Kreutzer		$3\frac{1}{5}$ Pf.
Ein Preußischer oder Polnischer Groschen		3 Schillinge
	oder	$3\frac{1}{5}$ Pf.
Ein Schlesisches Gröschel oder sogenannte Fledermaus		$2\frac{2}{3}$ Pf.

Ein

Ein Pfennig	2 Heller
Ein Albertus-Thaler, Holländ. M.	1 Th. 9 Gr.
Ein Holländiſcher Gulden	12 bis 13 Gr.
Ein Rubel, Rußiſche M. welche 10 Grieven oder 100 Copeken enthält,	1 Th. 4 bis 6 Gr.
Ein Piaſter in Spanien und Portugall	1 Th. 6 Gr.
Ein Real in Spanien	3 Gr.
Ein Real in Portugall	1 Gr. 5 Pf.
Ein Franzöſiſcher Laubthaler, oder ſogenannter groſſer Thaler, welcher 6 Livres beträgt,	1 Th. 14 Gr.
Ein franzöſiſcher kleiner Thaler, zu 3 Livres gerechnet,	19 Gr.
Ein livre, auf welchen 20 Sols gerechnet werden,	6 Gr. 4 Pf.
Ein Pfund Sterling in England, welches 20 Schillinge enthält,	6 Th.
Ein Beutel in der Türkey	500 Th.
Eine Krone in Dänneinark	18 Gr. 8 Pf.
Eine Däniſche Mark	4 Gr. 8 Pf.

NB. Verſchiedene von dieſen Münzen ſind nicht wirklich geprägtes Geld, ſondern angenommene Summen, nach denen man ſich im gemeinen Leben richtet. Es giebt z. E. keine geprägte Meißn. Gülden in Sachſen, keine geprägte Pfund Sterling in England, keine geprägte Livres in Frankreich, u. ſ. f. welches aber im Rechnen ſelbſt keinen Unterſchied macht.

II. Von dem Gewichte.

1. Kramergewichte.

Ein Centner (*) wiegt	5 Stein
oder	110 Pfund
Ein Pfund	32 Loth
Ein Loth	4 Quentchen
Ein Quentchen	4 Pfennig-Gewicht
Ein Pfennig-Gewicht	2 Heller-Gewicht

2. Gold- und Silbergewichte.

Eine Mark wiegt	8 Unzen
oder	16 Loth
oder	24 Karath
Eine Unze	2 Loth
Ein Loth	6 Gran
Ein Karath	4 Gran
Ein Gran	3 Grän

3. Apothekergewichte.

Ein Pfund wiegt	12 Unzen
oder	24 Loth
Eine Unze	8 Drachma
Ein Drachma	3 Scrupel
Ein Scrupel	20 Gran

4. Schiffsgewichte.

Eine Last hält	12 Schiffpfund
oder	36 Centner
Ein Schiffpfund	20 Ließpfund
Ein Ließpfund	14 Pfund

*) In einigen Orten rechnet man nur 100, in andern 102, 108, 112 Pfund auf den Centner, daher die Pfunde nicht überall gleich schwer sind.

III. Von dem Maaße.

1. Längen-Maaß.

100 leipziger Ellen, oder 200 leipziger Werkschuhe betragen so viel als

	97, 28	Dresdner Ellen.
oder	174, 33	Pariser Schuhe.
oder	185, 88	Englische Schuhe.
oder	180, 42	Rheinländische Schuhe.
oder	82, 37	Brab. Ellen.
oder	79, 28	Dänische Ellen.
oder	78, 84	Hamburger Ellen.
oder	86, 49	Nürnberger Ellen.
oder	97, 33	Warschauer Ellen.
oder	74, 13	Wiener Ellen.
oder	61, 78	Englische Yards.
oder	78.	Rußische Arschins.
oder	48.	Pariser Stäbe.

Eine Toise macht	6 Pariser Schuhe.
Eine Rheinländische Ruthe	12 Rheinl. Schuhe.
Eine Klafter	6 Schuhe oder 3 Ellen.
Eine deutsche geographische Meile enthält	23707$\frac{1}{2}$ Rheinl. Schuhe.
Eine gemeine deutsche Meile enthält	2000 Rheinl. Ruthen oder 24000 Rheinl. Schuhe.
Eine Sächßl. Policey-Meile	20333$\frac{1}{3}$; ;
Eine Englische Meile	5172 Rheinl. Schuhe.
Eine grosse franz. Meile	17852 ; ;
Eine mittlere	15244 ; ;
Eine kleinere	12444 ; ;
Eine Italiänische Meile	5907 ; ;
Eine Spanische Meile	19691 ; ;

Eine

Eine Schwediſche Meile	47258	Rheinl. Schuhe.
Eine Rußiſche Werſte	3375	: :

2. Getreyde-Maaß.

Eine Laſt enthält	3 Wiſpel.
oder bey Gerſte und Hafer	2 Wiſpel.
Ein Wiſpel	2 Malter.
Ein Malter	12 Scheffel.
Ein Scheffel	4 Viertel.
Ein Viertel	4 Metzen.
Eine Metze	4 Mäßchen.

3. Wein-Maaß.

Ein Fuder enthält	4 Orhoft.
Ein Orhoft	1½ Ohm.
Ein Ohm	2 Eymer.
oder	4 Anker.
oder	40 Stübchen.
oder	160 Kannen.

4. Bier-Maaß.

Ein Gebräude hält	9 Kupen.
Eine Kupe	2 Faß.
Ein Faß	2 Tonnen.
Eine Tonne	4 Oehmchen.
Ein Oehmchen	24 oder 25 Kannen.
Eine Kanne	2 Nößel.

Die Geometrie.

Erstes Capitel.

Erklärungen und Grundsätze.

§. 1.

Von den unstetigen Größen, mit welchen wir uns bisher in der Arithmetik beschäfftiget haben, wollen wir nunmehr zu den stetigen fortgehen, deren Eigenschaften und Ausmessung die Geometrie erkläret, wie schon in dem Vorberichte von den mathematischen Wissenschaften überhaupt §. 6. angemerkt worden ist. Das Wort Geometrie bedeutet zwar eigentlich nichts anders, als eine Erdmeßkunst, und zu der Zeit, da diese Wissenschaft erfunden worden ist, mag sie auch wohl nichts anders gewesen seyn, als eine ungebildete Kunst, Felder und Wiesen auszumessen. Denn die Meynung derer ist nicht unwahrscheinlich, welche behaupten, daß Egypten ihr Vaterland sey, wo die jährlichen Ueberschwemmungen des Nils die Einwohner genöthiget hätten, auf eine genaue Ausmessung ihrer Felder und Bestimmung ihrer Grenzen bedacht zu seyn. Allein zu unsern Zeiten würde man sich einen viel zu eingeschränkten Begriff von dieser Wissenschaft machen, wenn man glauben wollte, daß sie nichts anders enthielte, als eine Sammlung von Sätzen und Regeln, durch deren

ren Hülfe man gewisse Ausmessungen auf dem Felde vornehmen könnte. Ihr Umfang und Nutzen erstreckt sich unendlich weiter, indem sie nicht blos eine besondre Gattung, sondern alle Arten von ausgedehnten Größen betrachtet, und am Himmel sowohl als auf der Erde gebraucht werden kann. Ohne die Hülfe der Geometrie würden uns weder die Gesetze der Bewegung, noch die Eigenschaften des Lichts, noch die Größe und Bewegung der himmlischen Weltkörper, noch viele andre nützliche Wahrheiten bekannt seyn. Man hat daher auch nicht wohl gethan, daß man das Feldmessen, welches blos eine einzige und geringe Anwendung der Geometrie ist, die practische Geometrie überhaupt genannt hat, weil Anfänger durch diese Benennung sehr oft zu der irrigen Meynung verleitet werden, daß die Geometrie ausser dem Feldmessen keinen sonderlichen Nutzen habe.

§. 2.

Alle Körper, die in der Welt vorhanden sind, haben diese gemeinschaftliche Eigenschaft, daß sie einen gewissen Raum ausfüllen und nach allen Gegenden zu ausgedehnt sind. Dieser Raum nun, den die wirklichen Körper einnehmen, oder ihre körperliche Ausdehnung, sondert der Geometra in Gedanken von ihrer Materie ab, und betrachtet sie ganz allein in der Geometrie, ohne die übrigen Eigenschaften der wirklichen Körper mit in Erwegung zu ziehen. Man pflegt aber diese körperliche Ausdehnung einen **geometrischen Körper** zu nennen, den man also mit dem wirklichen oder sogenannten physikalischen Körper nicht verwirren muß. Ein **geometrischer Körper** ist daher nichts anders, als eine um-

ungränzte stetige Größe, die nach allen Gegenden zu ausgedehnt ist. Sonst sagt man auch, ein Körper ist diejenige Größe, die eine Länge, Breite und Dicke hat.

§. 3.

Dasjenige, wo eine Sache aufhört, nennt man ihre Grenze. Wenn man nun in Gedanken die Grenzen eines Körpers von dem Körper selbst absondert, und dieselben besonders betrachtet, so erlangt man den Begriff der **Flächen**, die also nur in die Länge und Breite ausgedehnt seyn, aber keine Dicke haben können. Denn wollte man auch bey den Flächen eine gewisse Dicke annehmen, so würde man sich einen Körper, und nicht die Grenzen eines Körpers vorstellen. Die Grenzen der Flächen heissen **Linien**, die also nur in die Länge ausgedehnt seyn, und keine Breite haben können, weil sie sonst selbst Flächen und nicht Grenzen derselben seyn müßten. Die Grenzen der Linien heissen **Puncte**, denen also ganz und gar keine Ausdehnung zukommen kann.

§. 4.

Wer die vorigen Erklärungen gehörig überdenkt, der wird leicht einsehen, daß die Namen, **Flächen**, **Linien** und **Puncte** u. s. f. lauter abstracte Begriffe anzeigen, welche, wie alle abstracte Begriffe, nicht einzeln, sondern in Verbindung mit andern wirklich existiren können. Es ist daher lächerlich, wenn einige Gelehrte, denn ungelehrten Personen wäre ein solcher **Fehler** leicht zu verzeihen, diese Erklärungen für **Grillen** und die Gründe der ganzen Geometrie für **Chimären** ausgeben wollen. Es ist wahr, es

giebt in der Welt kein Ding, das bloß eine Länge ohne Breite und Dicke, oder eine Länge und Breite ohne Dicke u. s. f. hätte. Allein es giebt Fälle, wo man blos die Länge und Breite, oder bloß eine Länge ohne Breite und Dicke zu wissen nöthig hat. Wenn man z. E. nach der Größe eines Feldes fragt, so verlangt man nur eine Kenntniß von seiner Ausdehnung in die Länge und Breite ohne Dicke. Wer an einen gewissen Ort reisen will, fragt nicht wie breit, sondern blos wie lang der Weg sey, u. s. w. Es war also sehr nöthig, diese verschiedne Begriffe von einander abgesondert zu betrachten. Es giebt keine Gelehrsamkeit ohne Gelehrten, keine Tugend ohne einen Tugendhaften, und doch pflegt man sich die Gelehrsamkeit, Tugend, und tausend andre Dinge abgesondert von denen, woran sie sich befinden, in andern Wissenschaften vorzustellen, ohne den Vorwurf zu hören, daß dergleichen Begriffe blosse Chimären enthielten.

§. 5.

Ein Körper ist also nicht aus Flächen, eine Fläche nicht aus Linien, und eine Linie nicht aus Puncten zusammengesetzt. Es ist auch eigentlich nicht möglich, eine mathematische Linie oder einen Punct zu machen. Man muß sich daher begnügen, die Puncte durch kleine physikalische Körperchen, die eine sehr geringe Ausdehnung haben, dergleichen die kleinen Klümchen von Kreide, Bleystift oder Tusche sind, und die Linien durch eine Reihe solcher Körperchen, bey denen die Dicke und Breite nicht sehr merklich ist, in der Ausübung abzubilden.

§. 6.

§. 6.

Wenn alle Theile einer Linie nach einerley Richtung liegen, so wird sie eine **gerade Linie** (Fig. 1. Tab. 1.) genannt. Haben aber nicht alle Theile einerley Richtung, so heißt sie eine **krumme Linie.** (Fig. 2. Tab. 2.) Bisweilen sind Linien aus geraden und krummen zusammengesetzt, welche man **vermischte Linien** zu nennen pflegt.

§. 7.

Man nimmt zum Maaß der Linien in der Geometrie eine gewisse Länge an, die man eine **Ruthe** nennt, und die, wie alle Maaße, nicht an allen Orten von einerley Größe ist. Die Ruthe theilt man in zehn gleiche Theile und nennt einen solchen Theil einen **Fuß** oder **Schuh**; der zehnte Theil eines Schuhs heißt ein **Zoll** und der zehnte Theil eines Zolls eine **Linie.** Bisweilen theilt man auch die Linie noch aufs neue in 10 gleiche Theile, welche einige **Scrupel** zu nennen pflegen. Die Ruthen bezeichnet man mit °, die Schuhe mit ′, die Zolle mit ″, und die Linien mit ‴. So bedeutet z. E. 75°, 3′, 8″, 7‴, eine Länge von 75 Ruthen, 3 Schuhen, 8 Zollen und 7 Linien. Diese Eintheilung verschaffet im Rechnen eine große Bequemlichkeit, weil man die Ruthen in Schuhe, Zolle und Linien ohne Multiplication, und eine ansehnliche Summe von Linien in Zolle, Schuhe und Ruthen ohne Division verwandeln kann. So ist z. E. 75°, 3′, 8″, 7‴ so viel als 75387‴, denn vermöge der angenommenen Eintheilung ist

75°	=	750′	=	7500″	=	75000‴	
3′		=	30″	=		300‴	
8″			=			80‴	
7‴			=			7‴	
75°, 3′, 8″, 7‴			=			75387‴	(§. 13.)

Will man daher umgewendet wissen, wie viel eine Summe Linien Zolle, Schuhe und Ruthen enthält, so darf man nur, von der Rechten gegen die linke zu, eine Zifer für die Linien, eine Zifer für die Zolle, und eine Zifer für die Schuhe abschneiden, die übrigen Zifern müssen Ruthen bedeuten. Z. E. 4382576925‴ enthalten 4382576°, 9′, 2″, 5‴.

§. 8.

Die Ruthen werden auch noch im gemeinen Leben auf andre Art eingetheilt. So pflegt man die sogenannte Rheinländische Ruthe in 12 Schuh, den Schuh in 12 Zoll u. s. f. einzutheilen. Die Leipziger Ruthe enthält 15 Werkschuhe, welche so viel halbe Leipziger Ellen betragen. Die französische Ruthe oder Toise enthält nur 6 pariser Fuß, welche um $\frac{205}{1000}$ größer sind, als 6 Rheinländische Schuhe. Den pariser Fuß aber theilt man in 12. Zoll, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 10 Scrupel, welche Eintheilung man genau merken muß, wenn man gewisse Maase, die in der Naturlehre vorkommen, verstehen will.

§. 9.

Eine ebene **Fläche** oder eine **Ebene** (**Planum**, Superficies plana) ist eine solche Fläche, auf welche man überall eine gerade Linie dergestalt legen kann, daß alle Puncte der Linie auf die Fläche selbst fallen.

fallen. Diejenigen Flächen, wo dieses nicht überall möglich ist, werden **unebene** oder **krumme Flächen** genannt.

§. 10.

Gerade Linien, welche sich auf einer ebenen Fläche befinden, und niemals zusammenstossen können, wenn sie auch auf beyden Seiten ohne Ende verlängert würden, wie BD und FG (Tab. 1. Fig. 3.) heissen **parallele** oder **gleichlaufende Linien**, weil sie überall einerley Abstand von einander haben. Hieraus wird man auch leicht einsehen, was **Parallel-Flächen** sind. Diejenigen Linien aber auf einer ebenen Fläche, die irgendwo zusammenstossen würden, wenn man sie auf beyden Seiten verlängerte, wie NP und QR (Fig. 4. Tab. 1.) werden in derjenigen Gegend, wo sie sich einander nähern, **convergent**, und auf der andern Seite, wo sie sich von einander entfernen, **divergent** genannt.

§. 11.

Die Neigung zweyer Linien, die einander in einem Puncte berühren oder durchschneiden, heißt ein **Winkel**, oder wenn man sich genauer ausdrückt, ein **ebener Winkel** (angulus planus) denn die Ecken der Körper, zum Exempel N. R. (Fig. 99. Tab. 11.) oder C. G. (Fig. 100.) die aus drey oder mehr ebenen Winkeln bestehen, werden auch **Winkel**, und zwar zum Unterschiede von jenen **körperliche Winkel** (anguli solidi) genannt. Die Linien selbst, deren Neigung den Winkel ausmachen, wie BC und CA (Fig. 5. Tab. 1.) heissen seine **Schenkel** (crura) und der Punct C, wo sie zusammen kommen, die

Spitze oder der Scheitel des Winkels (vertex anguli). Man benennt die Winkel, deren Zeichen $<$ iſt, welches man aber nicht allemal zu gebrauchen pflegt, auf dreyerley Art: Nemlich entweder durch einen Buchſtaben, den man auſſen an die Spitze ſetzt, oder durch einen kleinen Buchſtaben, den man inwendig zwiſchen die Schenkel ſchreibt, oder durch die drey Buchſtaben, die man an die Spitze des Winkels und an die Endpuncte der Schenkel geſetzt hat; doch muß in dieſem Falle der Buchſtabe, welcher am Scheitel des Winkels ſteht, allemal in die Mitte geſetzt werden. Der Winkel DCB (Fig. 5. Tab. 1.) den man auch durch den einzigen Buchſtaben o bezeichnen könnte, wäre alſo der Winkel, den die beyden Linien DC und BC mit einander machen.

§. 12.

Winkel über einer geraden Linie, wie o und u (Fig. 5.) die einen gemeinſchaftlichen Schenkel und eine gemeinſchaftliche Spitze haben, werden Nebenwinkel (anguli deinceps poſiti) genannt.

§. 13.

Steht eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie dergeſtalt, daß die Neben-Winkel gleich ſind, ſo werden beyde Linien ſenkrecht oder perpendiculär, und dergleichen Nebenwinkel rechte Winkel (anguli recti) genannt. So ſteht (Fig. 6. Tab. 1.) NC auf AB ſenkrecht; und die beyden Winkel x und y ſind rechte Winkel, die man bisweilen durch den Buchſtaben R anzuzeigen pflegt.

Auf

Auf einer ebenen Fläche steht eine Linie alsdenn senkrecht, wenn sie mit allen Linien auf der Fläche, die sich aus dem Punct, wo sie aufsteht, ziehen lassen, lauter gleiche Winkel macht. Soll also (Fig. 7. Tab. 1.) die Linie DC, die man sich auserhalb der Fläche des Pappiers vorstellen muß, senkrecht auf dieser Fläche stehen, so müssen die Winkel DCB, DCF, DCQ, DCG, DCN und DCA alle gleich groß, und folglich rechte Winkel seyn.

§. 14.

Alle übrigen Winkel, die nicht rechte Winkel sind, wie o und u (Fig. 5.) heissen schiefe **Winkel** (anguli obliqui), und zwar werden diejenigen schiefen Winkel, die kleiner sind, als rechte Winkel, d. i. deren Schenkel eine geringere Entfernung von einander haben, als die Schenkel der rechten Winkel, **spitzige Winkel** (anguli acuti), solche aber, die größer sind, als rechte Winkel, **stumpfe Winkel** (anguli obtusi) genannt. So ist (Fig. 5.) u ein spitziger und o ein stumpfer Winkel.

§. 15.

Eine Fläche, die in Linien eingeschlossen ist, heißt eine **Figur**, und die Linien, welche die Grenzen derselben ausmachen, ihre **Seiten** (latera). Wenn diese Seiten gerade Linien sind, so heißt auch die Figur eine **geradlinichte**, wenn es aber krumme Linien sind, eine **krummlinichte**, und sind es theils gerade, theils krumme Linien, eine **vermischte Figur**. Sind alle Seiten und alle Winkel einander gleich, so wird die Figur **ordentlich** oder **regulär** genannt. Sind aber die Seiten oder die Winkel

ungleich, so heißt die Figur **unordentlich** oder **irregulär**. So sind z. E. BDG (Fig. 8.) und ABDQ (Fig. 13.) reguläre, hingegen AGN (Fig. 9.) CNFR (Fig. 14.) und ACHD (Fig. 17.) irreguläre Figuren.

§. 16.

Eine Figur, die drey Seiten hat, heißt ein **Triangel** oder **Dreyeck**. Sind alle Seiten einander gleich, wie in dem Triangel BDG (Fig. 8.) so wird der Triangel **gleichseitig** (triangulum aequilaterum) genannt; sind aber nur zwey Seiten einander gleich, wie in dem Triangel AGN (Fig. 9.) so heißt er ein **gleichschenklichter**, (triangulum aequicrurum) und ist keine Seite der andern gleich, wie in dem Triangel ABC (Fig. 10.) ein **ungleichseitiger Triangel** (triangulum scalenum). Man pflegt die Triangel durch die drey Buchstaben zu benennen, die an den Spitzen der Winkel stehen, aber mit Vorsetzung des Zeichens △, damit man sie von den blossen Winkeln unterscheiden könne.

§. 17.

Ein Triangel, in welchem ein rechter Winkel angetroffen wird, heißt ein **rechtwinklichter**; dergleichen ist △ AGC (Fig. 11. Tab. 1.) ein solcher, in welchem sich ein stumpfer Winkel befindet, wie △ BAC (Fig. 10.) ein **stumpfwinklichter**; und ein solcher, wo alle drey Winkel spitzig sind, z. E. △ MNQ (Fig. 12.) ein **spitzwinklichter Triangel**.

§. 18.

§. 18.

Unter den vierseitigen Figuren heissen die regulären, d. i. diejenigen, die lauter gleiche Seiten und lauter gleiche oder rechte Winkel haben, **Quadrate**, z. E. QABD (Fig. 13. Tab. 1.) diejenigen, die zwar gleiche Seiten, aber schiefe Winkel haben, von denen nur die gegenüberstehenden gleich sind, **Rauten**, (Rhombi) wie CNFR (Fig. 14.) diejenigen, wo nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, aber alle Winkel rechte Winkel sind, **Rechtecke**, (Oblonga, Rectangula) z. E. NDSB (Fig. 15.) diejenigen, in denen nur die gegenüberstehenden Seiten, und auch nur die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, wie RMBQ (Fig. 16.) **längliche Rauten**, (Rhomboides) und alle übrigen vierseitigen Figuren, in welchen keine der jetzt erzählten Eigenschaften angetroffen wird, wie DACH (Fig. 17.) **Trapezia**. Sind in einer vierseitigen Figur die gegenüberstehenden Seiten parallel, so werden sie auch in Ansehung dieses Umstandes **Parallelogramma** genannt.

§. 19.

Die Figuren, die mehr als vier Seiten haben, nennt man überhaupt **Polygone** oder **Vielecke**, und unterscheidet sie blos dadurch von einander, daß man sie von der Anzahl ihrer Seiten oder ihrer Winkel benennt. So ist ein **Sechseck** ein Polygon, das sechs Seiten hat, ein **Siebeneck**, eine Figur, die sieben Seiten hat, u. s. f.

§. 20.

Eine krummlinichte Figur, in welcher alle Puncte ihrer Grenze einerley Abstand von einem gewissen

mittlern Puncte haben, wird ein **Cirkel** genannt (Fig. 18. Tab. 1.). Ein Cirkel entsteht daher, wenn sich eine gerade Linie z. E. D auf einer ebenen Fläche um einen gewissen festen Punct C ganz herum bewegt. Dieser feste Punct C, von welchem alle Puncte der krummen Linie, welche die Grenze des Cirkels ausmacht, und die **Peripherie** genannt wird, gleichweit abstehen, heißt daher der **Mittelpunct** oder das **Centrum.** Ein Stück der Peripherie, wie z. E. QA heißt ein **Cirkelbogen** (Arcus); jede gerade Linie aus dem Mittelpuncte in die Peripherie, wie CD und CA ein **Halbmesser, Radius,** oder **Semidiameter;** jede gerade Linie von einem Puncte der Peripherie gegen einen andern, wie DA und QR, eine **Chorde** oder **Sehne,** und eine solche Chorde, welche durch den Mittelpunct geht, wie NA ein **Diameter** oder **Durchmesser.** Haben gerade Linien, die sich ausserhalb dem Cirkel befinden, nur einen einzigen Punct mit der Peripherie des Cirkels gemein, gesetzt auch, daß man sie auf beyden Seiten ohne Ende verlängerte, wie BP, so werden sie **Berührungslinien** oder **Tangenten** genannt. Derjenige Theil eines Cirkels, dessen Grenzen ein Bogen und zwey Halbmesser sind, heißt ein **Sector** oder **Ausschnitt.** Z. E. das Stück CDA; ein solcher Theil aber, der durch einen Cirkelbogen und durch eine Sehne begrenzt ist, ein **Segment** oder **Abschnitt.** z. E. das Stück RQ. Das gewöhnliche Instrument, womit man Cirkel zu beschreiben pflegt, ist hinlänglich bekannt.

§. 21.

Man theilt die Peripherie eines jeden Cirkels in 360 gleiche Theile, und nennt einen solchen Theil

einen

einen Grad. Den Grad theilt man aufs neue in 60 gleiche Theile oder **Minuten**, und die Minuten wieder in 60 gleiche Theile oder **Secunden** ein. Die Grade bezeichnet man mit °, wie die Ruthen, die Minuten mit ' wie die Schuhe, und die Secunden mit " wie die Zolle. Man nimmt in der Geometrie zum Maasse der Winkel Cirkelbogen an, die man mit einem willkührlichen Halbmesser aus der Spitze der Winkel zwischen ihren Schenkeln beschreibet, und benennt einen Winkel von der Zahl der Grade, welche ein solcher Bogen enthält. So würde man z. E. den Winkel A (Fig. 19. Tab. 2.) einen Winkel von 62 Graden nennen, wenn der Bogen BC 62 Grade, d. i. $\frac{62}{360}$ von der Peripherie seines Cirkels enthielte. Damit man auch nicht nöthig habe, bey einer jeden Messung eines Cirkelbogens, diese Eintheilung vorzunehmen, so pflegt man von Meßing, Elfenbein oder andern Materien ganze und halbe Cirkel zu verfertigen, und nach der jetzt beschriebenen Art einzutheilen. Man nennt solche Instrumente daher **Winkelmesser**, und wenn sie blos auf dem Pappiere gebraucht werden, **Transporteurs**. Diejenigen Winkelmesser, deren man sich auf dem Felde bedient, heissen gemeiniglich **Astrolabia**, weil man sich sonst ihrer Hülfe auch am Himmel zu bedienen pflegte. Enthalten sie nur den vierten Theil der Peripherie, so pflegt man sie **Quadranten** zu nennen.

§. 22.

Die Auflösung einer Aufgabe, oder die Construction wird **geometrisch** genannt, wenn man sich dabey keines andern Instruments, als des Cirkels

und

und Linials bedient, und aus den Grundsätzen der Geometrie einen richtigen Beweis davon geben kann. Nimmt man aber zu andern Mitteln seine Zuflucht, z. E. zu einem Transporteur u. s. f. so heißt die Construction **mechanisch**.

§. 23.

Zwey Längen oder Flächen **decken** einander nach der Sprache der Geometrie, (congruunt) wenn man sie dergestalt auf einander legen kann, daß alle Grenzen der einen auf die Grenzen der andern fallen.

§. 24.

Wenn der Raum, den zwey Linien oder Flächen oder Körper einnehmen, einerley Grösse hat, so werden sie **gleich** genannt, gesetzt auch, daß er nicht einerley Figur haben sollte. Es kann daher z. E. ein Triangel einem Quadrate gleich seyn. Winkel heissen **gleich**, ob schon ihre Schenkel eine verschiedene Länge haben, wofern nur die Neigung derselben einerley ist. Man sagt daher von zwey Winkeln, daß sie einander decken, wenn nur ihre Spitzen und Schenkel, obgleich nicht die übrigen beyden Endpuncte derselben auf einander fallen.

§. 25.

Sowohl die Linien als auch die Flächen und Körper werden **ähnlich** genannt, wenn ihre Theile einerley Lage und Verhältnis haben. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∽.

Postulata.

§. 26.

Von einem jeden Puncte gegen einen jeden andern Punct eine gerade Linie zu ziehen.

§. 27.

Jede Linie ohne Ende zu verlängern oder zu verkürzen, und sie einer jeden geraden Linie gleich zu machen.

§. 28.

Mit jeder geraden Linie und aus jedem Puncte einen Cirkel zu beschreiben.

Axiomata.

§. 29.

Alle Radien, ingleichen alle Diameter eines Cirkels, oder gleicher Cirkel sind einander gleich; und wenn zwey Cirkel gleich grosse Durchmesser oder Halbmesser haben, so müssen sie einander selbst gleich seyn.

§. 30.

Zwischen zwey Puncten ist zwar eine unendliche Anzahl krummer Linien, aber nur eine einzige gerade Linie möglich, welche die kürzeste unter allen ist. Durch die beyden Endpuncte wird daher die Grösse und Lage einer geraden Linie völlig bestimmt.

§. 31.

Zwey gerade Linien können einander nur in einem einzigen Puncte berühren oder durchschneiden,

und

und folglich keinen Raum einschliessen. Ein geradelinichtes Zweyeck ist also unmöglich.

§. 32.

Zwey Seiten in einem geradelinichten Triangel zusammen genommen sind allemal grösser, als die dritte Seite.

§. 33.

Alle Linien, alle Winkel, und alle Figuren, die einander decken, sind einander gleich.

Dieser Grundsatz wird das principium congruentiae genannt.

§. 34.

Alle Linien, und alle Winkel, die einander gleich sind, müssen einander decken.

Von den Figuren gilt dieses nicht, wofern sie nicht zugleich einander ähnlich sind. Ein Dreyeck kann so groß seyn, als ein Viereck, aber unmöglich ein Viereck decken. (§. 23. 24.)

§. 35.

Die Peripherien zweyer Cirkel können einander nur in zwey Puncten durchschneiden, und es kann davon nicht mehr als ein einziger Durchschnittspunct S über die gerade Linie AC fallen, die durch die Mittelpuncte dieser Cirkel sich ziehen läßt. (Fig. 24. Tab. 2.)

§. 36.

Alle gleiche Winkel haben einerley Maaß, und wenn Winkel einerley Maaß haben, so müssen sie einander gleich seyn.

Zweytes Capitel.

Von den Linien, Winkeln und Figuren, in Ansehung ihrer Gleichheit.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn in einem Triangel ein Winkel so groß ist, als ein Winkel in einem andern Triangel, und überdieses die beyden Seiten, welche diesen Winkel einschliessen, in beyden Triangeln einerley Grösse haben; so muß auch die dritte Seite in dem ersten Triangel so groß seyn, wie die dritte Seite in dem andern Triangel, ferner müssen auch die übrigen beyden Winkel, nemlich diejenigen, die einerley Seiten gegenüber stehen, und die ganzen Triangel selbst einander gleich seyn.

Es sey (Fig. 30. Tab. 2.) die Bedingung oder Hypothesis

	a	=	A
	ac	=	AC
	ab	=	AB
so ist der Satz	cb	=	CB
selbst oder die	c	=	C
Thesis	b	=	B
	△ acb	=	△ ACB

Beweis.

Man lege den Triangel abc in Gedanken über den Triangel ABC dergestalt, daß die Endpuncte der Seite ab im ersten Triangel auf die Endpuncte der Seite AB des andern Triangels fallen, welches deswegen angeht, weil diese beyden Seiten, vermöge der angenommenen Bedingung, einander gleich sind. (§. 34.)

(§. 34.) Da nun auch der Winkel a dem Winkel A, und der Schenkel ac dem Schenkel AC gleich gesetzt wird, so müssen nicht nur die Winkel selbst, sondern auch die Endpuncte ihrer Schenkel c und C auf einander fallen. Da ferner der Punct b auf den Punct B gelegt worden ist, so decken nicht nur die geraden Linien cb und CB, weil zwischen zwey Puncten nur eine gerade Linie möglich ist, (§. 30.) sondern auch die Winkel c und C, die Winkel b und B, und überhaupt die ganzen Triangel einander, woraus ihre Gleichheit offenbar ist (§. 33.).

§. 38.

Durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel wird also ein Triangel völlig bestimmt. Es wird daher jeder leicht einsehen, wie man aus diesen drey gegebenen Stücken einen Triangel beschreiben könne. Es sey z. E. (Fig. 28. Tab. 2.) der Winkel G und die beyden Linien DC und AB gegeben. Man trage diese beyden Linien auf die Schenkel des gegebenen Winkels, mache GC gleich DC und GB = AB, und ziehe die gerade Linie BC, so ist der verlangte Triangel fertig.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn eine Seite in einem Triangel eben die Größe hat, als eine Seite in einem andern Triangel; und wenn überdieses die beyden anliegenden Winkel in beyden Triangeln einander gleich sind, so folgt daraus, daß auch der dritte Winkel in dem ersten Triangel dem dritten Winkel in dem andern Triangel, ferner die übrigen beyden Seiten, die

einerley

einerley Winkeln gegenüber stehen, und die Flächen der Triangel selbst einander gleich seyn müssen.

Bedingung (Fig. 30.) ab = AB
a = A
b = B

Satz. c = C
ac = AC
cb = CB
△ acb = △ ACB

Beweis.

Man lege den einen Triangel acb auf den andern Triangel ACB dergestalt, daß die Endpuncte der Seite ab auf die Endpuncte der Seite AB fallen, welches wegen der angenommenen Gleichheit dieser beyden Seiten geschehen kann. Weil nun der Winkel a so groß ist, als der Winkel A, so muß der Schenkel des ersten in diesem Falle auf den Schenkel des andern, (§. 34.) und folglich der Punct c in die Linie AC selbst oder in die verlängerte Linie AC fallen. Eben so muß auch die Seite bc wegen der Gleichheit der Winkel b und B auf die Seite BC, und folglich der Punct c entweder in die Linie BC selbst oder in die verlängerte Linie BC fallen. Soll nun der Punct c sowohl in die Linie AC als auch in die Linie BC kommen, so muß er nothwendig auf den Durchschnittspunct dieser beyden Linien fallen, welches kein andrer als der Punct C seyn kann, weil zwey gerade Linien einander nur in einem einzigen Puncte berühren oder durchschneiden können. (§. 31.) Da nun der Punct a auf A und b auf B gelegt wurde, so ist offenbar, daß die Winkel c und C, ferner die Seiten ac und

AC, die Seiten cb und CB und überhaupt die ganzen Triangel einander decken, und folglich einander gleich seyn müssen. (§. 33.)

§. 40.

Aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln ist also nur ein einziger Triangel möglich.

§. 41.

Lehrsatz. Wenn alle drey Seiten in einem Triangel eben die Größe haben, wie die drey Seiten in einem andern Triangel, so müssen auch die Winkel, die einerley Seiten gegenüber stehen, und die Flächen der Triangel selbst einander gleich seyn.

Es sey (Fig. 30.)

ac	=	AC
ab	=	AB
bc	=	BC

so folgt hieraus, daß

a	=	A
c	=	C
b	=	B
△ acb	=	ACB

Beweis.

Man beschreibe mit der Seite ac in dem andern Triangel aus dem Puncte A den Bogen nq, so muß dieser Bogen wegen der Gleichheit der Seiten ac und AC durch den Punct C gehen. Man beschreibe ferner mit der Seite bc aus dem Puncte B den Bogen sr, so muß derselbe, vermöge der Gleichheit der Seiten bc und BC durch eben diesen Punct C gehen, welches also zugleich der Durchschnittspunct der beyden Bogen seyn wird. Nun

lege

lege man, wie vorhin, den Triangel acb über den Triangel ACB dergestalt, daß die Endpuncte der Seite ab auf die Endpuncte der Seite AB fallen, welches auch in diesem Falle wegen der Gleichheit der Seiten ab und AB möglich ist. Weil nun der Bogen nq mit dem Radio ac aus dem Puncte A beschrieben worden, und der Punct a auf den Punct A gelegt worden ist, so muß der Punct c nothwendig in diesen Bogen nq selbst, oder in den verlängerten Bogen nq fallen. Aus eben dem Grunde muß auch der Punct c in den zweyten Bogen sr oder in diesen verlängerten Bogen fallen, weil der Bogen rs mit dem Radio bc = BC beschrieben worden. Soll nun der Punct C sowohl in den Bogen nq als auch in den Bogen rs kommen, so muß er nothwendig auf den Durchschnittspunct dieser beyden Bogen, d. i. auf den Punct C fallen, weil über der Linie AB, welche durch die Mittelpuncte dieser Bogen gehet, nur ein Durchschnittspunct möglich ist, wenn man auch beyde Bogen verlängerte. (§. 35.) Es decken also die Winkel a und A die Winkel c und C, die Winkel b und B und die ganzen Triangel einander; folglich ist die Gleichheit dieser Winkel und der Triangel selbst hinlänglich erwiesen. (§. 33.)

§. 42.

Die Größe eines Triangels und seiner Winkel wird also durch die Größe seiner Seiten völlig bestimmt.

§. 43.

Aufgabe. Ueber eine gegebene Linie einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es sey AC (Fig. 24. Tab. 2.) die gegebene Linie, über welche der gleichseitige Triangel beschrieben werden soll. Man beschreibe aus dem Puncte A und aus dem Puncte C mit der Linie AC ein Paar Cirkel, die über dieser Linie AC einander nur in einem einzigen Puncte durchschneiden werden. (§. 35.) Diesen Durchschnittspunct S verbinde man durch gerade Linien mit den Endpuncten der gegebenen Linie A und C, so muß der Triangel ASC ein gleichseitiger Triangel seyn.

Beweis.

AS	=	AC	) (§. 29.)
AC	=	SC	)
AS	=	SC	(§. 11. Arithm.)

In der Ausübung ist es nicht nöthig, daß man die ganzen Cirkel verzeichnet, die hier nur die Deutlichkeit der Demonstration erfordert.

§. 44.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Linien einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es mögen FG und CD (Fig. 26. Tab. 2.) die beyden gegebenen Linien seyn. Man erwähle sich eine davon zur Grundlinie, wofern dieses nicht durch die Aufgabe bestimmt ist, und mache z. E. AF so groß als FG. (§. 27.) Mit der andern Linie DC beschreibe man sowohl aus dem Puncte A als auch aus dem Puncte F Cirkel oder nur Bogen, die einan-

einander durchschneiden. (§. 28.) Aus dem Durchschnittspuncte dieser Bogen C ziehe man gerade Linien gegen die Puncte A und F, so muß der Triangel gleichschenklicht, und seine Seiten den gegebenen Linien gleich seyn.

Beweis.

Daß AF = FG, ist aus der Construction klar, und weil die Bogen, die einander in C durchschneiden, aus dem Puncte A und F mit dem Radio DC beschrieben worden, so folgt, daß

$$\left.\begin{array}{lcl} AC & = & DC \\ FC & = & DC \end{array}\right) \text{(§. 29.)}$$

$$\overline{AC = FC}$$

und folglich ist der Triangel ACF gleichschenklicht (§. 16.)

§. 45.

Aufgabe. Aus drey gegebenen Linien, von denen jede kleiner ist, als die übrigen beyden zusammengenommen, einen Triangel zu beschreiben.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 27. Tab. 2.) AG, PQ und NM die drey gegebenen Linien seyn, und

$$\begin{array}{lcl} AG & < & PQ + NM \\ PQ & < & AG + NM \\ NM & < & PQ + AG \end{array}$$

woraus man die Möglichkeit eines Triangels einsieht. (§. 32.)

Man erwähle eine davon, z. E. AG, zur Grundlinie, und mache BG = AG. Aus den Endpuncten der Linie BG beschreibe man mit den andern beyden gegebenen Linien PQ und NM Cirkel oder nur Cirkelbogen, die einander durchschneiden werden, weil diese beyden Linien zusammengenommen größer sind als BG. Aus dem Durchschnittspuncte C ziehe man gerade Linien gegen die Puncte B und G, so ist der verlangte Triangel fertig.

§. 46.

Aufgabe. An einen gegebenen Punkt einer geraden Linie einen Winkel zu setzen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung.

Es sey (Fig. 34. Tab. 3.) C der gegebene Punct, an welchen ein Winkel gesetzt werden soll, der dem gegebenen Winkel A gleich ist. Man erwähle sich auf den Schenkeln des Winkels A zwey beliebige Puncte, z. E. N und G, stelle sich zwischen N und G eine gerade Linie vor, wodurch der Triangel ANG entsteht; aus den drey Seiten dieses Triangels beschreibe man über die gegebene Linie einen Triangel, (§. 45.) so daß CD = AG, CB = AN, und BD = NG, so muß der Winkel C so groß seyn als der gegebene Winkel A.

Beweis.

Weil vermöge der Construction alle drey Seiten in dem Triangel CBD eben die Größe haben, wie die drey Seiten in dem Triangel ANG, so müssen auch in beyden die Winkel gleich seyn, die einerley

Seiten gegenüber stehen, und folglich C = A (§. 41.).

§. 47.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Puncte auf einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 38. Tab. 3.) in der geraden Linie der Punct A gegeben, auf welchen die senkrechte Linie kommen soll. Man schneide durch Hülfe des Cirkels von der gegebenen Linie auf beyden Seiten des Puncts zwey gleiche Stücke ab, und mache also AB = AQ. Ueber die Linie BQ, die aus diesen beyden gleichen Stücken besteht, beschreibe man einen gleichschenklichten Triangel. (§. 44.) Aus der Spitze desselben, nemlich aus dem Puncte C ziehe man gegen den gegebenen Punct eine gerade Linie, so muß diese Linie CA senkrecht auf der gegebenen Linie stehen.

Beweis.

AB = AQ
BC = QC) vermöge der Construction
CA = CA (§. 9. Arithm.)

∠ BAC = ∠ QAC (§. 41.)

Sind also diese Nebenwinkel BAC und QAC gleich, so steht CA nothwendig auf BQ senkrecht. (§. 13.)

§. 48.

Aufgabe. Von einem gegebenen Puncte, der sich ausserhalb einer gegebenen Linie befindet, eine senkrechte Linie darauf zu ziehen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 37. Tab. 3.) der Punct B gegeben. Man beschreibe aus diesem Punkte B einen Bogen, der die gegebene Linie in zwey Puncten, z. E. in C und F durchschneidet. Unter dieser Sehne CF, oder wenn dieses nicht angienge, über dieselbe, beschreibe man einen gleichschenklichten Triangel. (§. 44.) Die Spitze desselben N verbinde man mit dem gegebenen Puncte B durch eine gerade Linie, so muß dieselbe und folglich auch der Theil BG, den man in der Ausübung nur zu ziehen braucht, senkrecht auf der gegebenen Linie stehen.

Beweis.

Man ziehe noch die Linien BC und BF, so ist

BC	=	BF	(§. 29.)
CN	=	FN	vermöge der Construction.
BN	=	BN	(§. 9. Arithm.)
∠CBN	=	∠FBN	(§. 41.)
BC	=	BF	(§. 29.)
BG	=	BG	(§. 9. Arithm.)
∠O	=	∠U	(§. 37.)

und also BG senkrecht auf CF. (§. 13.)

§. 49.

Aufgabe. Eine gerade Linie in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 42. Tab. 3.) die gegebene Linie BQ. Man beschreibe über und unter dieselbe gleichschenklichte Triangel. (§. 44.) Die Spitzen dieser Triangel S und G verbinde man mit einander durch

eine

eine gerade Linie, so muß diese Linie SG in dem Durchschnittspuncte C die gegebene Linie BQ in zwey gleiche Stücke theilen, d. i. BC muß so groß seyn, als CQ.

Beweis.

SB	=	SQ	) vermöge der Construction.
BG	=	QG	)
SG	=	SG	(§. 9. Arithm.)
x	=	y	(§. 41.)
SB	=	SQ	
SC	=	SC	
BC	=	CQ	(§. 37.)

§. 50.

Aufgabe. Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sey CAR (Fig. 39. Tab. 3.) der gegebene Winkel. Man schneide auf den Schenkeln desselben zwey willkührliche Stücke von gleicher Länge ab, und mache also AC = AR. Aus den Endpuncten dieser gleichen Stücke C und R beschreibe man mit einerley Halbmesser Bogen, die einander durchschneiden. Aus dem Durchschnittspuncte dieser Bogen B ziehe man eine gerade Linie gegen die Spitze des Winkels A, so muß diese Linie BA den ganzen Winkel CAR in zwey gleiche Theile zergliedern, d. i. o muß so groß seyn, als u.

Beweis.

Man ziehe die Linien CB und BR, so ist

CB	=	RB	(§. 29.)
AC	=	AR	vermöge der Construction.
AB	=	AB	(§. 9. Arithm.)
o	=	u	(§. 41.)

§. 51.

Lehrsatz. Durch den Diameter wird die Peripherie und der ganze Cirkel in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis.

Es sey (Fig. 21. Tab. 2.) BD der Diameter des Cirkels BADG. Man stelle sich vor, daß der obere Theil BAD um den Diameter BD herum gedrehet, und auf den untern Theil BGD gelegt werde, so müssen nicht nur die Endpuncte der beyden Bogen BAD und BGD, sondern auch alle mittlern Puncte, und folglich die ganzen Bogen auf einander fallen, weil alle Puncte des Bogens BAD eben den Abstand von dem Mittelpuncte C haben, als die Puncte des Bogens BGD. Da nun also diese beyden Bogen, und überhaupt diese beyden Theile des Cirkels, welche durch den Diameter entstehen, einander decken, und folglich einander gleich sind, (§. 33.) so ist klar, daß sowohl die Peripherie, als auch der Cirkel selbst durch den Diameter in zwey gleiche Theile getheilt wird.

§. 52.

Jeder Cirkelbogen also, der über eine gerade Linie beschrieben wird, ist die Hälfte von der ganzen Peripherie, wenn sein Mittelpunct und seine Endpuncte sich in dieser Linie befinden.

§. 53.

Man errichte (Fig. 21.) aus dem Mittelpuncte des Cirkels über und unter den Diameter die senkrechten Linien CA und CG (§. 47.) so werden nicht nur o und u, sondern auch x und y gleiche und rechte Winkel seyn. (§. 13.) Der Bogen BA, als das Maaß von den Winkeln o (§. 21.) muß daher eben so groß seyn, als der Bogen AD, welcher das Maaß von dem Winkel u ist, (§. 36.) und folglich die Hälfte von dem Bogen BAD, d. i. von der halben Peripherie, (§. 50.) oder welches einerley ist, der vierte Theil von der ganzen Peripherie. Da nun die ganze Peripherie in 360 Grade eingetheilt wird, (§. 21.) und der vierte Theil davon 90 ist, so erhellt hieraus, daß ein rechter Winkel zu seinem Maasse einen Bogen von 90 Graden hat.

§. 54.

Man beschreibe aus dem Mittelpuncte des vorigen Cirkels noch einen andern, z. E. den kleinern Cirkel badg, so wird der Bogen bad die Hälfte, und der Bogen ba ein Viertel von der Peripherie badg seyn. Da man nun die Peripherie eines jeden Cirkels, er sey groß oder klein, in 360 Grade eintheilt, so ist klar, daß auf den Bogen ba oder ad ebenfalls 90 Grade gehen müssen. Es gilt also gleich viel, ob man mit einem kleinern oder grössern Radio aus der Spitze eines Winkels innerhalb seiner Schenkel den Bogen beschreibt, der ihn messen soll, weil alle solche Bogen gegen ihre Peripherie einerley Verhältnis haben.

§. 55.

§. 55.

Lehrsatz. Die Nebenwinkel über einer geraden Linie betragen zusammen 180 Grade, oder zwey rechte Winkel.

Sind also (Fig. 22. Tab. 2.) o und e Nebenwinkel, so ist $o + e = 180°$.

Beweis.

Man beschreibe aus der gemeinschaftlichen Spitze dieser Winkel die Bogen CQ und QD, welche das Maaß dieser Winkel vorstellen (§. 21.) Nun machen aber die beyden Bogen CQ und QD eine halbe Peripherie aus; (§. 52.) folglich ist klar, daß die beyden Winkel $\frac{360}{2}$ d. i. 180 Grad, oder zwey rechte Winkel betragen müssen. (§. 53.)

§. 56.

Wären drey oder mehr Winkel über einer geraden Linie, an einer gemeinschaftlichen Spitze, so würde die Summe aller auch nicht mehr als 180 Grad ausmachen. Denn das Maaß der drey Winkel x, o und u (Fig. 23.) ist nicht mehr, als ein halber Cirkel. (§. 52.)

§. 57.

Lehrsatz. Alle Winkel, die sich auf einer ebenen Fläche um einen gemeinschaftlichen Punct befinden, betragen in der Summe 360 Grad, oder so viel, als vier rechte Winkel.

Beweis.

Wenn man aus dem Puncte, um welchen sich diese Winkel, wie o, e, u und y (Fig. 25.) befinden,

mit

mit einerley Halbmesser Cirkelbogen beschreibt, die ihr Maaß vorstellen, so machen alle diese Bogen zusammen genommen eine ganze Peripherie aus, daher die Summe dieser Winkel nothwendig 360 Grad (§. 21.) oder 4 rechte Winkel betragen muß. (§. 53.)

§. 58.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie von einer andern durchschnitten wird, so sind die entgegengesetzten Winkel, welche man Vertical-Winkel nennt, einander gleich.

Es werde (Fig. 31. Tab. 2.) die gerade Linie AM von der geraden Linie QR durchschnitten, so ist

o = u
x = e

Beweis.

o	+	e	=	180°	)	(§. 55.)
u	+	e	=	180°	)	
o	+	e	=	u	+ e	(§. 11. Arithm.)
		e	=		e	(§. 9. Arithm.)
		o	=		u	(§. 14. Arithm.)

Ferner

x	+	u	=	180°	)	(§. 55.)
e	+	u	=	180°	)	
x	+	u	=	e	+ u	(§. 11. Arithm.)
		u	=		u	
		x	=		e	(§. 14. Arithm.)

§. 59.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die beyden

beyden innern Winkel, die nach einerley Gegend zu liegen, 180 Grad, oder zwey rechte Winkel ausmachen, so müssen die beyden geraden Linien parallel seyn.

Es werde (Fig. 31. Tab. 2.) die Linie AM und BN von der dritten QR durchschnitten, und es sey

$$x + y = 180°$$

so muß AM parallel mit BN seyn.

Beweis.

Wenn die Summe der beyden Winkel $x + y$ 180 Grad beträgt, so muß auch die Summe der Winkel $u + i$, 180 Grade ausmachen, denn

$$\left.\begin{array}{rcl} x + u & = & 180° \\ y + i & = & 180° \end{array}\right) \text{ (§. 55.)}$$

$$x + y + u + i = 180° + 180° \text{ (§. 13. Arithm.)}$$

$$x + y = 180° \text{ vermöge der angenommenen Bedingung,}$$

$$u + i = 180° \text{ (§. 14. Arithm.)}$$

Sollten nun die beyden Linien nicht parallel seyn, so müßten sie, wenn man sie auf beyden Seiten verlängerte, irgendwo zusammen kommen. (§. 10.) Wollte man nun behaupten, daß sie auf der einen Seite, z. E. wo die Puncte A und B sich befinden, einander verlängert durchschneiden müßten, weil $x + y = 180°$, so müßte dieses auch auf der andern Seite aus eben der Ursache geschehen, weil auch $u + i$, wie jetzt gezeigt worden ist, 180 Grad beträgt. Da aber zwey gerade Linien nicht in mehr als einem Puncte einander berühren oder durchschneiden können, (§. 31.) so ist klar, daß die beyden Linien AM und BN, weil ihr Zusammenstossen unmöglich ist, parallel seyn müssen.

§. 60.

§. 60.

Wenn man $x + y$ vermindern, und kleiner als 180 Grad machen wollte, ſo müßte man entweder den Punct A der Linie BN, oder den Punct B der Linie AM, oder alle beyde Linien einander näher bringen. Würde nun $x + y$ kleiner als 180°, ſo müßte $u + i$ gröſſer werden, als 180°, und näherten ſich die Linien alſo in der Gegend AB, ſo müßten ſie ſich auf der andern Seite von einander entfernen. Hieraus iſt alſo klar, wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchſchnitten werden, und die innern Winkel, die nach einer Gegend zu liegen, zuſammen, mehr oder weniger als zwey rechte Winkel betragen, ſo können dieſe beyden Linien nicht parallel ſeyn, ſondern müſſen ſich auf derjenigen Seite, wo die Summe dieſer beyden Winkel kleiner iſt, als 180 Grad, einander nähern, und auf der andern Seite, wo die Summe derſelben mehr als 180 Grad beträgt, von einander entfernen. Z. E. iſt (Fig. 32.) $n + m < 180°$, ſo werden die Linien EF und CD in der Gegend EC convergent, und wenn $s + r > 180°$ iſt, in der Gegend FD divergent ſeyn.

§. 61.

Lehrſatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchſchnitten werden, und die beyden innern Winkel, die nach entgegengeſetzten Richtungen liegen, und Wechſelswinkel heiſſen, einander gleich ſind, ſo müſſen die beyden Linien parallel ſeyn.

Wenn

Wenn (Fig. 31.) $y = u$
oder $x = i$

so ist AM parallel mit BN.

Beweis.

$y = u$ vermöge der angenommenen Bedingung.
$x = x$ (§. 9. Arithm.)

$y + x = u + x$ (§. 13. Arithm.)
$u + x = 180°$ (§. 55.)

$y + x = 180°$ (§. 11. Arithm.)

Ist nun $y + x = 180°$, so ist AM mit BN parallel. (§. 59.)

§. 62.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten durchschnitten werden, und die innern Winkel so groß sind, als die äusern entgegenstehenden Winkel, die nach einerley Richtung liegen, so müssen die Linien ebenfalls parallel seyn.

Nemlich wenn (Fig. 31.) $y = o$
oder $i = e$

so ist AM parallel mit BN.

Beweis.

$y = o$ vermöge der Bedingung des Satzes.
$o = u$ (§. 58.)

$y = u$ (§. 11. Arithm.)

Da nun y und u Wechselswinkel sind, so ist AM mit BN parallel. (§. 61.)

§. 63.

Wenn also zwey Linien auf einer dritten perpendicular stehen, so sind sie unter sich paral-

parallel. Denn sind (Fig. 33.) AB und CD senkrechte Linien, so muß sowohl o als auch u ein rechter Winkel seyn (§. 13.), folglich o + u zwey rechte Winkel oder 180° betragen, und daher AB und CD parallel seyn (§. 59.).

§. 64.

Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so müssen die innern Winkel, die nach einer Gegend zu liegen, zusammengenommen 180 Grad oder zwey rechte Winkel ausmachen.

Es sey (Fig. 31.) AM parallel mit BN, so soll erwiesen werden, daß $x + y = 180°$.

Beweis.

Wenn die Summe der beyden Winkel nicht 180 Grad betrüge, so müßte sie entweder größer oder kleiner seyn. Wäre sie kleiner als 180 Grad, so müßte u + i größer seyn als 180°, weil diese vier Winkel als zwey Paar Nebenwinkel zweymal 180 Grad ausmachen. (§. 55.) Folglich würden sich die beyden Linien AM und BN auf der Seite, wo die Winkel x und y liegen, einander nähern, und auf der Seite, wo sich u und i befinden, von einander entfernen. (§. 60.) Wäre aber x + y größer als 180 Grad, so würden sie sich aus eben der Ursache in der Gegend der Winkel x + y von einander entfernen, und auf der andern Seite zusammenkommen. Da sie aber parallel seyn sollen, vermöge der angenommenen Bedingung, und folglich auf keiner Seite zusammenkommen können, (§. 10.) so ist klar, daß x + y oder u + i weder kleiner noch größer als 180

Grad seyn kann. Ist aber die Summe der Winkel x und y weder kleiner noch größer, so ist sie nothwendig eben so groß als 180 Grad.

§. 65.

Wenn also zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, wie *AM* und *BN* von *QR* (*Fig. 31.*) so müssen auch die Wechselswinkel *y* und *u*, einander gleich, und der innere Winkel *y* eben so groß seyn, als der äußere entgegenstehende Winkel *o*. Denn

$$x + y = 180^\circ \quad (\S.\ 64.)$$
$$x + u = 180^\circ \quad (\S.\ 55.)$$

$$x + y = x + u$$
$$x = x \quad \text{subtr.}$$

$$y = u \quad (\S.\ 14.\ \text{Arithm.})$$
$$u = o \quad (\S.\ 58.)$$

$$y = o \quad (\S.\ 11.\ \text{Arithm.})$$

§. 66.

Wenn in einem Parallelogram ein rechter Winkel gefunden wird, so kann man daraus schliessen, daß auch die übrigen Winkel rechte Winkel seyn müssen. Denn ist (Fig. 15. Tab. 1.) N ein rechter Winkel, so muß es auch D seyn, sonst könnten sie beyde zusammen nicht zwey rechte Winkel ausmachen. (§. 64.) Ist nun D ein rechter Winkel, so muß aus eben dem Grunde auch S ein rechter Winkel, und ist es S, auch B und also alle drey rechte Winkel seyn.

§. 67.

§. 67.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct eine Linie parallel mit einer gegebenen Linie zu ziehen.

Auflösung.

Es sey (Fig. 48. Tab. 3.) der gegebene Punct N, durch welchen eine Linie mit QS parallel gezogen werden soll. Man ziehe aus dem Puncte N eine gerade Linie z. E. NS unter einem beliebigen Winkel auf die gegebene Linie QS. Diesen Winkel m trage man an den gegebenen Punct N über die Linie NS, nach einer entgegengesetzten Richtung, daß nämlich $n = m$ (§. 46.) wird; der Schenkel desselben NP, den man auf beyden Seiten nach Belieben verlängern kann, muß mit der gegebenen Linie QS parallel seyn.

Beweis.

Weil n und m vermöge der Construction nach entgegengesetzten Richtungen stehen, und einander gleich gemacht worden sind, so werden die Linien NP und QS von der dritten NS dergestalt durchschnitten, daß die Wechselswinkel n und m gleich sind; folglich ist NP mit QS parallel. (§. 61.)

§. 68.

Lehrsatz. Die Summe aller drey Winkel in einem geradelinichten Triangel beträgt so viel, als zwey rechte Winkel oder 180 Grad.

Es sey (Fig. 35. Tab. 3.) △ BCF ein geradelinichter Triangel, so ist < B + < F + < BCF = 180°.

Beweis.

Man ziehe durch eine Spitze dieses Triangels, z. E. durch den Punct C eine Linie parallel mit der gegenüberstehenden Seite BF (§. 67.) so ist

< ACB	=	< B	(§. 65.)
< BCF	=	< BCF	(§. 9. Arithm.)
< DCF	=	< F	(§. 65.)

< ACB + < BCF + < DCF = < B + < BCF + < F (§. 13. Arithm.)

< ACB + < BCF + < DCF = 180° (§. 56.)

< B + < BCF + < F = 180° (§. 11. Arithm.)

§. 69.

Es sind also in einem geradelinichten Triangel zwey rechte oder zwey stumpfe, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel zugleich unmöglich.

§. 70.

Weiß man zwey Winkel in einem geradelinichten Triangel, so kann man den dritten finden, wenn man die Summe derselben von 180 Grad abzieht. Weiß man aber nur einen, so erhält man die Summe der übrigen beyden, wenn man ihn von 180 Grad subtrahirt.

§. 71.

Wenn also in zwey Triangeln zwey Winkel von einer Größe sind, so muß auch der dritte Winkel in dem

dem einen Triangel dem dritten Winkel in dem andern Triangel gleich seyn.

§. 72.

Zwey Triangel müssen daher auch einander gleich seyn, wenn eine Seite in dem einen Triangel nebst einem anliegenden und gegenüberstehenden Winkel so groß ist, als eine Seite nebst dem anliegenden und gegenüberstehenden Winkel in dem andern Triangel, weil in diesem Falle auch der dritte Winkel dem dritten gleich ist. (§. 39.)

§. 73.

Lehrsatz. Wird in einem geradelinichten Triangel eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel, der durch diese Verlängerung entsteht, so groß als die beyden innern Winkel des Triangels, die ihm gegenüberstehen, zusammen genommen.

Es werde (Fig. 36. Tab. 3.) in dem Triangel MNA die Seite MA verlängert; so ist

$$\angle NAS = \angle M + \angle N$$

Beweis.

$\angle M + \angle N + \angle MAN = 180°$ (§. 68.)
$\angle NAS + \angle MAN = 180°$ (§. 55.)

$\angle M + \angle N + \angle MAN = \angle NAS + MAN$ (§. 11.)
$\angle MAN = \angle MAN$ (§. 9. Arithm.)

$\angle M + \angle N = \angle NAS$ (§. 14. Arithm.)

§. 74.

Lehrsatz. In einem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich.

Es sey (Fig. 41. Tab. 3.) in dem Triangel ACD

$$\frac{AC = AD}{\text{so ist } C = D}$$

Beweis.

Man theile den Winkel CAD, welchen die beyden gleichen Schenkel einschliessen, durch die Linie AB in zwey gleiche Theile (§. 50.), so ist vermöge der Construction

n = m
AC = AD vermöge der angenommenen Bedingung.
AB = AB (§. 9. Arithm.)

C = D (§. 37.)

§. 75.

Weil nun ein gleichseitiger Triangel auch zugleich ein gleichschenklichter Triangel ist, so müssen darinnen alle Winkel einander gleich seyn, und folglich jeder davon 60 Grad oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen. (§. 68.) Denn es sey (Fig. 43.) NCM ein gleichseitiger Triangel, so ist, weil CN = CM

und weil auch NC = NM, $\frac{N = M \quad C = M}{N = C}$ (§. 74.) (§. 11. Arithm.)

Nun ist N + C + M = 180° (§. 68.)
d. i. N + N + N = 180° (§. 9. Arithm.)
oder 3 N = 180°

$\frac{3\,N}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$ (§. 18. Arithm.)

$\frac{3\,N}{3} = N$ (§. 19. Arithm.)

N = 60° (§. 11. Arithm.)

und folglich auch M und C 60 Grad.

§. 76.

Lehrsatz. Sind in einem geradelinichten Triangel zwey Winkel von einer Grösse, so müssen auch die beyden gegenüberstehenden Seiten gleich seyn.

Es sey (Fig. 41.) in dem Triangel CAD

C = D
so ist AC = AD

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze des Triangels die senkrechte Linie AB (§. 47.) so ist

c = a (§. 13.)
C = D vermöge der angenommenen Bedingung.
AB = AB (§. 9. Arithm.)

AC = AD (§. 72.)

§. 77.

Sind also alle drey Winkel in einem geradelinichten Triangel einander gleich, und folglich jeder 60 Grad oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, so ist der Triangel gleichseitig.

§. 78.

Lehrsatz. **Wenn in einem Cirkel oder in gleichen Cirkeln ein Bogen einem andern Bogen gleich ist, so müssen auch die Sehnen, welche zu diesen Bogen gehören, einerley Grösse haben.**

Es sey (Fig. 44. Tab. 3.)

der Bogen DE so groß, als der Bogen EF

---

so ist auch die Sehne DE der Sehne EF gleich.

Beweis.

Man verbinde die Endpuncte der Bogen durch die geraden Linien CD, CE und CF mit dem Mittelpuncte des Cirkels, so werden die beyden Triangel CDE und CEF entstehen. Der Bogen DE wird das Maaß von dem Winkel e, und der Bogen EF das Maaß von dem Winkel n seyn (§. 21.). Vermöge der angenommenen Bedingung aber sind die beyden Bogen einander gleich, folglich auch

e	=	n	(§. 36.)
DC	=	CF	(§. 29.)
CE	=	CE	(§. 9. Arithm.)
DE	=	EF	(§. 37.)

Der Beweis würde eben derselbe seyn, wenn nicht von einerley Cirkel, sondern von zwey gleichen Cirkeln die Rede wäre, weil auch die Halbmesser in gleichen Cirkeln einander gleich seyn müssen. (§. 29.)

§. 79.

Lehrsatz. **Wenn in einem Cirkel oder in gleichen Cirkeln eine Sehne einer andern Sehne gleich ist, so sind auch die Bogen, welche zu diesen Sehnen gehören, von einer Grösse.**

Es

Es sey (Fig. 44. Tab. 3.)
die Sehne DE gleich der Sehne EF

so muß der Bogen DE dem Bogen EF gleich seyn.

Beweis.

Man ziehe die Halbmesser CD, CE und CF, so ist in den beyden Triangeln DCE und CEF

DE	=	EF	vermöge der angenommenen Bedingung
DC	=	CF	(§. 29.)
CE	=	CE	
e	=	n	(§. 41.)

Nun ist der Bogen DE das Maaß von dem Winkel e, und der Bogen EF das Maaß von dem Winkel n. Da aber die Winkel gleich sind, so muß auch ihr Maaß gleich, und folglich der Bogen DE so groß wie der Bogen EF seyn. (§. 36.)

§. 80.

Sollte man also an einen gegebenen Punct einer geraden Linie, z. E. an den Punct N der Linie ND (Fig. 20. Tab. 2.) den gegebenen Winkel A (Fig. 19.) setzen, so könnte man dieses, auser der §. 46. angeführten Methode, auch folgendergestalt thun. Man beschreibe aus der Spitze des gegebenen Winkels mit einem willkührlichen Halbmesser den Bogen BC, mit eben dem Halbmesser beschreibe man auch aus dem gegebenen Puncte der geraden Linie einen Bogen von unbestimmter Grösse. Nun fasse man die Endpuncte des Bogens BC, wodurch die gerade Linie zwischen diesen beyden Puncten, oder die Sehne des Bogens BC bestimmt wird, in den Cirkel, und trage diese Sehne aus dem Puncte D in den beschriebenen Bogen. Den Endpunct C verbin-

de man mit dem gegebenen Puncte N durch eine gerade Linie, so muß der Winkel N so groß seyn, als der Winkel A, weil die Bogen einerley Halbmesser und gleiche Sehnen haben.

§. 81.

Man beschreibt daher aus zwey gegebenen Winkeln und einer Linie, z. E. aus den beyden Winkeln P und A, nebst der geraden Linie CN (Fig. 29. Tab. 2.) am geschwindesten einen Triangel, wenn man nach der jetzt angeführten Methode die beyden gegebenen Winkel P und A an die Endpuncte der Linie CN setzet, und ihre Schenkel so lange verlängert, bis sie einander durchschneiden. Die beyden gegebenen Winkel aber müssen in der Summe weniger als 180 Grad betragen, wenn ein Triangel möglich seyn soll. (§. 68.)

§. 82.

Lehrsatz. Ein jeder Winkel, der sich an dem Mittelpuncte eines Cirkels befindet, ist zweymal so groß, als ein Winkel an der Peripherie, wenn die Schenkel beyder Winkel auf einerley Cirkelbogen stehen.

Es giebt hier eigentlich drey Fälle, in welchen ein Winkel an dem Mittelpuncte, und ein Winkel an der Peripherie auf einerley Cirkelbogen stehen kann; denn der Mittelpunct des Cirkels liegt entweder in einem Schenkel des Winkels an der Peripherie, oder zwischen dessen Schenkeln, oder ausser denselben, und daher muß auch ein dreyfacher Beweis

gefüh-

geführet werden, wenn die Allgemeinheit dieses Satzes gezeigt werden soll.

Erster Fall.

Es sey (Fig. 50. Tab. 4.) o ein Winkel am Mittelpuncte, B ein Winkel an der Peripherie, der mit jenem auf einerley Bogen AF stehet, und das Centrum des Cirkels C befinde sich in dem Schenkel AB des Winkels an der Peripherie, so ist

$$o = 2B$$

Beweis.

CB	=	CF	(§. 29.)
B	=	F	(§. 74.)
B	=	B	(§. 9. Arithm.)
2B	=	B + F	(§. 13. Arithm.)
o	=	B + F	(§. 73.)
o	=	2B	(§. 11. Arithm.)

Zweyter Fall.

Es sey (Fig. 51.) PCQ ein Winkel am Mittelpuncte, PNQ ein Winkel an der Peripherie, beyder Schenkel auf dem Bogen PQ. und der Mittelpunct des Cirkels C zwischen den Schenkeln des Winkels an der Peripherie, so läßt sich auch in diesem Falle erweisen, daß

$$PCQ = 2\,PNQ$$

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze des Winkels an der Peripherie durch den Mittelpunct die gerade Linie NG, so ist vermöge des vorigen Beweises

x	=	2 e
y	=	2 o
x + y	=	2 e + 2 o (§. 13. Arithm.)
x + y	=	PCQ (§. 10. Arithm.)
PCQ	=	2 e + 2 o (§. 11. Arithm.)
2 e + 2 o	=	2 (e + o) (§. 9. Arithm.)
PCQ	=	2 (e + o) (§. 11. Arithm.)
2 (e + o)	=	2 PNQ (§. 10. Arithm.)
PCQ	=	2 PNQ (§. 11. Arithm.)

Dritter Fall.

Es sey (Fig. 52.) auf einerley Bogen DM ein Winkel an dem Mittelpuncte DCM, und ein Winkel an der Peripherie DAM, und das Centrum des Cirkels befinde sich ausser den Schenkeln des Winkels an der Peripherie, so ist gleichfalls

DCM = 2 DAM

Beweis.

Man ziehe wieder aus der Spitze des Winkels an der Peripherie durch den Mittelpunct des Cirkels die Linie AR, so ist vermöge des ersten Beweises

RCM	= 2 RAM
2 RAM	= 2 RAD + 2 DAM (§. 10. Arithm.)
RCM	= 2 RAD + 2 DAM (§. 11. Arithm.)
RCM	= RCD + DCM (§. 10. Arithm.)
RCD + DCM	= 2 RAD + 2 DAM (§. 11. Ar.)
RCD	= 2 RAD vermöge des ersten Beweises.
DCM	= 2 DAM (§. 14. Arithm.)

Da nun nicht mehr als diese drey Fälle möglich sind, so ist klar, daß ein Winkel am Mittelpuncte überhaupt noch einmal so groß ist, als ein Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen steht.

§. 83.

§. 83.

Weil ein Winkel am Mittelpuncte den ganzen Bogen, worauf er steht, zu seinem Maaß hat, (§. 21.) so kann ein Winkel an der Peripherie nur die Hälfte des Bogens, auf welchem seine Schenkel stehen, zu seinem Maaß haben. Stünde daher ein Winkel an der Peripherie auf einem Bogen von 80 Graden, so würde es ein Winkel von 40 Graden, stünde er auf einem Bogen von 100 Graden, so würde es ein Winkel von 50 Graden, u. s. f. seyn.

§. 84.

Es sind also alle Peripherie-Winkel, wie z. E. R (Fig. 53. Tab. 4.) deren Schenkel auf den Endpuncten eines Diameters, d. i. auf einer halben Peripherie stehen, rechte Winkel oder Winkel von 90 Graden, und folglich diejenigen, die auf einem grössern Bogen stehen, als die halbe Peripherie ist, wie der Winkel A (Fig. 54.) stumpfe Winkel, diejenigen aber, die auf einem kleinern Bogen stehen, als die halbe Peripherie ist, wie der Winkel B (Fig. 54.) spitzige Winkel.

§. 85.

Es müssen ferner alle Peripherie-Winkel einander gleich seyn, welche, wie B und R (Fig. 54.) auf einerley oder auf gleichen Bogen eines Cirkels stehen.

§. 86.

Sind endlich Peripherie-Winkel, die auf verschiedenen Bogen stehen, einander gleich, so müssen auch diese Bogen einerley Grösse haben. Denn ist (Fig. 45. Tab. 3.) der Winkel QNP so groß, als

der

der Winkel BNR, so muß auch das Maaß des erstern, d. i. $\frac{1}{2}$ QB so groß seyn, als das Maaß des andern, d. i. $\frac{1}{2}$ BR, und folglich auch QB = BR. (§. 17. Arithm.)

§. 87.

Aufgabe. An einen gegebenen Endpunct einer geraden Linie eine senkrechte Linie zu ziehen.

Es sey (Fig. 55. Tab. 4.) die gerade linie BA gegeben, über welche an den Endpunct B eine senkrechte linie errichtet werden soll.

Auflösung.

Man erwähle sich einen beliebigen Punct auf der gegebenen linie, z. E. den Punct G, beschreibe über die Entfernung desselben von dem gegebenen Endpuncte B, d. i. über die linie BG einen gleichschenklichten Triangel BCG (§. 44.). Die Seite CG, welche dem gegebenen Endpuncte B gegen über stehet, verlängere man, und mache CF = CG. Aus dem Puncte F ziehe man gegen den Punct B eine gerade linie, so muß diese linie FB auf der gegebenen linie BA senkrecht stehen.

Beweis.

Weil vermöge der Construction CB = CG = CF, so können diese drey gleiche linien als Halbmesser eines Cirkels angesehen werden. Man beschreibe daher mit der linie CB einen Cirkel, so wird die Peripherie desselben auch durch die Puncte G und F gehen. Der Winkel FBG, als ein Peripheriewinkel, der über den Diameter FG stehet, muß also nothwendig ein rechter Winkel seyn, (§. 84.) und folglich die linie FB senkrecht auf der linie BA stehen. (§. 13.)

§. 88.

§. 88.

Lehrsatz. Eine senkrechte Linie, wodurch eine Sehne in zwey gleiche Theile getheilt wird, theilt auch, wenn man sie verlängert, den dazu gehörigen Bogen in zwey gleiche Theile, und geht durch den Mittelpunct des Cirkels.

Es werde die Sehne QR (Fig. 45. Tab. 3.) durch die senkrechte Linie NB in zwey gleiche Theile QG und GR getheilet, so läßt sich erweisen, daß auch der Bogen QBR dadurch in die zwey gleichen Theile QB und BR getheilet wird, und daß NB durch den Mittelpunct des Cirkels gehet.

Beweis.

Man ziehe die Linien NQ und NR, so ist in den beyden Triangeln QNG und GNR

$$\left.\begin{array}{rcl} QG & = & GR \\ o & = & u \\ NG & = & NG \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{vermöge der Bedingung des} \\ \text{Satzes.} \\ (\S.\ 9.\ \text{Arithm.}) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \sphericalangle QNB & = & \sphericalangle BNR \\ QN & = & NR \end{array}\right\} \quad (\S.\ 37.)$$

Aus der Gleichheit der Winkel QNB und BNR erhellet die Gleichheit der Bogen QB und BR (§. 86.) und aus der Gleichheit der Sehnen QN und NR die Gleichheit der Bogen, die zu diesen Sehnen gehören. (§. 79.) Ist nun also

der Bog. QN = dem Bog. NR
und der Bog. QB = dem Bog. BR

so ist QN + QB = NR + BR (§. 13. Arithm.)

und folglich geht die Linie NB durch die Mitten des Cirkels, d. i. durch das Centrum desselben.

§. 89.

§. 89.

Sollte man also einen Cirkel-Bogen, z. E. den Bogen DCN (Fig. 40.) in zwey gleiche Theile zergliedern, so dürfte man nur die Sehne dieses Bogens DN durch die senkrechte Linie SQ halbiren, (§. 49.) so würde dieselbe in dem Puncte C auch den Bogen in zwey gleiche Theile theilen.

§. 90.

Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel zu beschreiben.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 46. Tab. 3.) C, B und A, die drey gegebenen Puncte seyn, durch welche ein Cirkel beschrieben werden soll. Man stelle sich zwischen dem Puncte C und B, so wie zwischen den Puncten B und A eine gerade Linie vor, und theile beyde Linien CB und BA durch die senkrechten Linien SF und QR in zwey gleiche Theile (§. 49.). Der Punct G, wo die Theilungslinien SF und QR einander durchschneiden, muß der Mittelpunct desjenigen Cirkels seyn, dessen Peripherie durch alle drey gegebene Puncte gehet, und den man nunmehr mit der Linie GC oder GA leicht beschreiben kann.

Beweis.

Weil die Puncte C, B und A in der Peripherie des Cirkels liegen sollen, so müssen die Linien CB und BA Sehnen von dem zu beschreibenden Cirkel seyn. Da nun vermöge der Construction die senkrechten Linien SF und QR die Sehnen CB und BA in zwey gleiche Theile theilen, so muß der Mittelpunct

punct des verlangten Cirkels sowohl in der Linie SF als auch in der Linie QR, (§. 88.) und folglich in dem Durchschnittspuncte G liegen, weil dieses der einzige Punct ist, der sich in den beyden geraden Linien zugleich befinden kann. (§. 31.)

§. 91.

Aus der vorigen Aufgabe läßt sich zugleich die Art und Weise einsehen, wie man zu einem gegebenen Bogen oder ganzen Cirkel den Mittelpunct finden kann; denn man darf nur zwey beliebige Chorden annehmen, und sie durch senkrechte Linien halbiren, so zeigt der Durchschnittspunct der Theilungslinien das verlangte Centrum.

§. 92.

Lehrsatz. Ein Parallelogram wird durch eine Diagonal-Linie, d. i. durch eine gerade Linie, die man von einem Winkel in den entgegengesetzten Winkel ziehen kann, in zwey gleiche Triangel getheilet.

Es sey (Fig. 48.) QNPS ein Parallelogram, und NS eine Diagonal-Linie, so soll erwiesen werden, daß

$$\Delta\ QNS = \Delta\ NPS.$$

Beweis.

Weil QNPS ein Parallelogram ist, vermöge der angenommenen Bedingung, so muß NP mit QS, und NQ mit PS parallel seyn; (§. 18.) folglich

$$\left.\begin{array}{ccc} m & = & n \\ x & = & y \end{array}\right) \text{ (§. 65.)}$$
$$NS = NS \text{ (§. 9. Arithm.)}$$
$$\Delta\ QNS = \Delta\ NPS \text{ (§. 39.)}$$

§. 93.

Weil vermöge des vorigen Beweises die Triangel QNS und NPS einander decken müssen, so folgt hieraus ferner, daß

$$QS = NP$$
$$NQ = PS$$
$$Q = P$$

und weil auch, wie schon in dem vorigen Beweise angemerkt worden,

$$m = n$$
$$y = x$$

so ist $m + y = n + x$ (§. 13. Arithm.)
oder $\angle QSP = \angle QNP$ (§. 10. Arithm.)

das heißt: in einem jeden Parallelogram sind die gegenüberstehenden Seiten und die gegenüberstehenden Winkel einander gleich.

§. 94.

Alle senkrechte Linien, die sich zwischen einerley Parallellinien befinden, müssen also einander gleich seyn. Denn es sey (Fig. 56. Tab. 4.) die Linie AD parallel mit der Linie NR, und sowohl AN als auch MP senkrecht auf NR, so ist klar, daß diese beyden Linien AN und MP unter sich parallel seyn, (§. 63.) und mit den Linien AM und NP ein Parallelogram ausmachen müssen. (§. 18.) Ist nun AMPN ein Parallelogram, so ist $AN = MP$. (§. 93.)

§. 95.

Lehrsatz. Eine jede vierseitige Figur, in welcher die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogram.

Es

Es sey (Fig. 48. Tab. 3.) in der vierseitigen Figur QNPS

NP = QS
NQ = PS

so muß auch NP parallel mit QS,
und NQ parallel mit PS seyn.

Beweis.

Man ziehe die Diagonale NS, so entstehen die Triangel NQS und NPS; in welchen

QS = NP) vermöge der angenommenen Bedingung.
NQ = PS)
NS = NS (§. 9. Arithm.)

m = n)
x = y) (§. 41.)

Aus der Gleichheit der Wechselswinkel m und n folgt, daß NP parallel mit QS,
und aus der Gleichheit der Wechselswinkel x und y, daß NQ parallel mit PS ist. (§. 61.)

§. 96.

Da nun in einem Rechteck und in einer Rhomboide die gegenüberstehenden Seiten, in einem Quadrate und Rhombo alle Seiten, folglich auch die gegenüberstehenden einander gleich sind, (§. 18.) so ist klar, daß alle diese vier Arten von vierseitigen Figuren Parallelogrammen sind.

§. 97.

Ein Parallelogram läßt sich also leicht beschreiben, wenn man einen Winkel weiß, und die beyden Seiten, welche diesen Winkel einschliessen. Wären z. E. (Fig. 47. Tab. 3.) die Linien CD und AB

nebst dem Winkel N gegeben, so dürfte man nur den Winkel G so groß, als den gegebenen Winkel N, (§. 80.), ferner GB = AB und GD = CD machen, aus dem Puncte D mit der Seite GB, aus dem Puncte B mit der Seite GD Bogen beschreiben, und den Durchschnittspunct L mit den Puncten D und B durch gerade Linien verbinden; denn die Figur GDLB muß nothwendig ein Parallelogram seyn, weil die gegenüberstehenden Seiten einerley Grösse haben. (§. 95.) Soll ein rechtwinklichtes Parallelogram beschrieben werden, so braucht man nur zwey anliegende Seiten zu wissen, und sie rechtwinklicht an einander zu setzen, im übrigen aber, wie vorhin, zu verfahren. Denn ist (Fig. 48.) NP vermöge der Construction so groß, als QS, und NR so groß, als PS gemacht worden, so ist die Figur QNPS ein Parallelogram, (§. 95.) und ist NQ auf QS senkrecht, folglich bey Q ein rechter Winkel, so müssen auch alle übrige Winkel rechte Winkel seyn. (§. 66.) Zu der Construction eines Quadrats braucht man also nichts als eine Linie. Wäre z. E. (Fig. 49. Tab. 3.) die Linie DQ gegeben, so würde man ein Quadrat erhalten, wenn man an einem Endpuncte dieser Linie, z. E. an dem Punct D eine senkrechte Linie AD errichtete, (§. 87.) dieselbe so groß machte, als DQ, aus den Puncten A und Q mit AD Bogen beschriebe, die einander durchschnitten, und aus dem Durchschnittspuncte B die Linien BA und BQ zöge. Denn weil vermöge der Construction alle Seiten, und also auch die gegenüberstehenden gleich sind, so müssen dieselben auch parallel seyn, (§. 94.) und weil AD senkrecht auf QD gesetzt worden, so ist D ein rechter Winkel, (§. 13.) folglich sind auch die

übri-

übrigen drey Winkel rechte Winkel, (§. 66.) und daher diese Figur ein Quadrat. (§. 18.)

§. 98.

Lehrsatz. Alle Parallelogramme, die sich zwischen einerley Parallellinien, und über einerley oder gleichen Grundlinien befinden, sind einander gleich.

Es sey (Fig. 56. Tab. 4.) die Linie AD parallel mit der Linie NR, und zwischen denselben befinde sich über der gemeinschaftlichen Grundlinie NP sowohl das Parallelogram ANPM, als auch das Parallelogram HNPD, so soll erwiesen werden, daß

ANPM = HNPD.

Beweis.

Weil die beyden Vierecke ANPM und HNPD vermöge der angenommenen Bedingung Parallelogramme sind, so ist

AM = NP
NP = HD) (§. 93.)

AM = HD (§. 11. Arithm.)

AM + MH = HD + MH (§. 13. Arithm.)
d. i. AH = MD (§. 10. Arithm.)

AN = MP
NH = PD) (§. 93.)

△ AHN = △ MDP (§. 41.)

△ AHN — △ MCH = △ MDP — △ MCH (§. 14. Arithm.)
d. i. AMCN = CHDP

AMCN + △ NCP = CHDP + △ NCP (§. 13. Ar.)
d. i. ANPM = HNPD (§. 10. Arithm.)

§. 99.

Man pflegt in einem Parallelogram die senkrechte Linie, die man von derjenigen Seite, welche der Grundlinie entgegen steht, entweder auf die Grundlinie selbst, oder auf die verlängerte Grundlinie ziehen kann, die **Höhe** desselben zu nennen. So ist z. E. (Fig. 63. Tab. 5.) die senkrechte Linie DC oder SA die Höhe des Parallelograms NDSB, wofern man NB zur Grundlinie annimmt, welches aber von der blossen Willkühr oder Bequemlichkeit abhängt, indem man jede Seite als die Grundlinie betrachten kann. Daß es aber gleichviel ist, ob die senkrechte Linie, welche die Höhe vorstellt, auf die Grundlinie selbst oder auf die verlängerte Grundlinie gezogen wird, und daß z. E. DC = SA, erhellt daraus, weil alle senkrechte Linien, die sich zwischen einerley Parallelen befinden, einander gleich sind. (§. 94.) Alle Parallelogrammen zwischen einerley Parallellinien müssen daher nothwendig gleiche Höhen haben, weswegen man den vorigen Satz auch folgendergestalt auszudrücken pflegt: **Alle Parallelogramme sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.**

§. 100.

Auch Triangel z. E. △ *LSR* **und** △ *LNR* (*Fig. 57.*) **sind einander gleich, wenn sie über einerley Grundlinie, und zwischen einerley Parallellinien stehen.** Denn man ziehe aus dem Punct R die Linie RB parallel mit der Seite LS, und die Linie RP parallel mit der Seite LN, so müssen die dadurch entstehenden Parallelogrammen LSBR und LNPR einander gleich seyn. (§. 98.)

Ist

Ist aber LSBR = LNPR

so ist auch $\frac{1}{2}$ LSBR = $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 18. Arithm.)
d. i. △ LSR = △ LNR (§. 92.)

§. 101.

Die senkrechte Linie z. E. FB (Fig. 64. Tab. 5.) oder CG (Fig. 65.) von der Spitze eines Triangels auf die Grundlinie, welches eine jede Seite seyn kann, oder auf die verlängerte Grundlinie, wird seine **Höhe** genannt. Man wird daher leicht einsehen, daß sich der vorige Satz auch also ausdrücken läßt: **Alle Triangel sind einander gleich, die einerley Grundlinie und Höhe haben.**

§. 102.

Weil also (Fig. 57.)

△ LSR = △ LNR (§. 100.)
und △ LNR = $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 92.)

△ LSR = $\frac{1}{2}$ LNPR (§. 11. Ar.)

d. h. ein jeder Triangel ist die Hälfte eines Parallelograms, wenn er mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat, oder sich zwischen eben denselben Parallellinien befindet.

§. 103.

Lehrsatz. **Wenn man über die Seiten eines rechtwinklichten Triangels Quadrate beschreibt, so ist das Quadrat derjenigen Seite, welche dem rechten Winkel gegen über stehet, so groß, als die Quadrate der übrigen beyden Seiten zusammen genommen.**

Es sey (Fig. 58. Tab. 4.) der Triangel CAB ein rechtwinklichter Triangel, und CB die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über stehet, so ist, wenn die vierseitigen Figuren, die über die Seiten dieses Triangels beschrieben worden, Quadrate sind

$$CFNB = AMLB + ACPR$$

Beweis.

Das Quadrat AMLB läßt sich beschreiben, wenn man die Seite AC des rechtwinklichten Triangels verlängert, bis AM = AB wird, hernach durch M die Linie ML parallel mit AB, und durch die Linie BL parallel mit AM ziehet. Denn da CAB ein rechter Winkel ist, vermöge der angenommenen Bedingung, so muß auch MAB ein rechter Winkel (§. 55.) ingleichen ABL, BLM und AML rechte Winkel (§. 66.) und daher AMLB ein Quadrat seyn, weil nicht nur vermöge der Construction AM = AB, sondern auch die gegen über stehenden Seiten parallel und folglich gleich sind. (§. 93.) Eben so ist klar, daß man das Quadrat ACPR beschreiben könne, wenn man AB verlängert, bis AR = AC wird, und alsdenn durch die Puncte R und C mit AC und AR Parallelen zieht. Wenn man nun in dem Quadrate, das über die Seite CB beschrieben worden, aus der Spitze des rechten Winkels A die Linie AG parallel mit den Seiten CF und BN ziehet, so wird dieses Quadrat dadurch in die beyden Parallelogramme QGNB und QGFC zergliedert. Man ziehe nunmehr die Linien CL und AN, so entstehen die beyden Triangel CBL und ANB, die einander gleich seyn müssen, weil CB = BN, als Seiten des Quadrats CFNB und BL =

BA als Seiten des Quadrats AMLB und der Winkel CBL so groß, als der Winkel ABN ist, indem jeder aus dem Winkel eines Quadrats, d. i. aus einem rechten Winkel und dem Winkel CBA bestehet. (§. 37.) Da nun CA und AM eine einzige gerade Linie, vermöge der Construction, ausmachen, und BL parallel ist mit CM, so ist der Triangel CBL die Hälfte von dem Quadrat AMLB, (§. 102.) so wie aus eben dem Grunde, weil AG parallel mit BN gezogen worden, der Triangel ANB die Hälfte von dem Parallelogram QGNB ist. (§. 102.) Da nun die Triangel CBL und ANB, d. i. die Hälften der Figuren AMLB und QGNB einander gleich sind, so müssen auch die ganzen Figuren einander gleich seyn. Zieht man gerade Linien von P nach B und von A nach F, so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß das Parallelogram QGFC so groß ist, als das Quadrat ACPR. Da nun das Quadrat CFNB aus den beyden Parallelogrammen QGNB und QGFC bestehet, so ist klar, daß CFNB = AMLB + ACPR.

§. 104.

Pythagoras soll diesen Lehrsatz erfunden haben, daher man ihn auch das pythagorische Theorem zu nennen pflegt. Von einigen wird er auch Magister Matheseos genannt.

§. 105.

Die Seite, welche in einem rechtwinklichten Triangel dem rechten Winkel gegen über steht, heißt die **Hypothenuse**, und die übrigen beyden, welche den rechten Winkel einschliessen, die *Catheti*, daher

man auch den vorigen Lehrsatz so auszudrücken pflegt: Das Quadrat der Hypothenuse ist so groß, wie die Quadrate der *Cathetorum* zusammen genommen. Man pflegt übrigens auch die Quadrate durch die beyden Buchstaben anzuzeigen, die an den Endpuncten ihrer Seiten stehen, zu denen man noch rechter Hand den Buchstaben q setzt. Z. E. der vorige Satz könnte auch also geschrieben werden:

$$CB^q = CA^q + AB^q$$

§. 106.

Ist also in einem rechtwinklichten Triangel die Hypothenuse und ein Cathetus so groß, als in einem andern rechtwinklichten Triangel, so müssen auch die übrigen Stücke in beyden Triangeln, und die Triangel selbst einander gleich seyn. Ist z. E. (Fig. 59.) sowohl AQR als auch aqr ein rechtwinklichter Triangel, und

$$AQ = aq$$
$$AR = ar$$

so ist auch
$$RQ = rq$$
$$A = a$$
$$Q = q$$
$$\triangle AQR = \triangle aqr$$

Denn weil $AQ = aq$ und $AR = ar$, vermöge der angenommenen Bedingung, so ist auch

$$AQ^q = aq^q$$
und $$AR^q = ar^q$$

Da

Da nun nach dem pythagorischen Lehrsatze

$$AQ^q = AR^q + RQ^q$$
$$AQ^q = aq^q$$

$$AR^q + RQ^q = aq^q \quad (\S.\ 11.\ Ar.)$$
$$aq^q = ar^q + rq^q \quad (\S.\ 103.)$$

$$AR^q + RQ^q = ar^q + rq^q \quad (\S.\ 11.\ Ar.)$$
$$AR^q = ar^q$$

$$RQ^q = rq^q \quad (\S.\ 14.\ Ar.)$$

$$RQ = rq$$

Sind nun alle drey Seiten in dem einen Triangel so groß als in dem andern, so müssen auch die Winkel, die einerley Seiten gegen über stehen, und die Triangel selbst von einerley Grösse seyn. (§. 41.)

§. 107.

Soll ein Quadrat noch einmal so groß, als ein gegebenes Quadrat, z. E. als das Quadrat FMRG (Fig. 60. Tab. 4.) gemacht werden, so darf man nur über die Diagonale MG des gegebenen Quadrats ein Quadrat beschreiben. Denn weil F der Winkel eines Quadrats, und folglich ein rechter Winkel ist, so ist

$$MG^q = FM^q + FG^q$$
$$FM^q = FG^q$$

$$MG^q = FG^q + FG^q = 2\,FG^q$$

§. 108.

Sollte das zu beschreibende Quadrat 3mal so groß seyn, als das gegebene, so errichte man an das Ende der Diagonale eine senkrechte Linie NG, mache die-

dieselbe so groß als die Seite des gegebenen Quadrats FG, und ziehe die Hypothenuse MN, über welche sich ein Quadrat beschreiben läßt, welches dreymal so groß ist, als das gegebene Quadrat. Denn

$MN^{\square} = MG^{\square} + NG^{\square}$ (§. 103.)
$MG^{\square} = 2\,FG^{\square}$ (§. 107.)

$MN^{\square} = 2\,FG^{\square} + NG^{\square}$ (§. 9. Arithm.)
$FG^{\square} = NG^{\square}$ weil $FG = NG$ vermöge der Constr.

$MN^{\square} = 2\,FG^{\square} + FG^{\square} = 3\,FG^{\square}$ (§. 9. Ar.)

§. 109.

Wird ein Quadrat verlangt, so groß als zwey gegebene Quadrate, z. E. als die Quadrate FMRG und CPFD (Fig. 60.) so beschreibe man einen rechten Winkel A, trage auf die Schenkel desselben die Seiten der beyden gegebenen Quadrate, so daß

$AG = FG$
und $AD = CD$

und ziehe die Hypothenuse DG, so muß dieses die Seite eines Quadrats seyn, welches so groß ist, als beyde gegebene Quadrate zusammen genommen. Denn

$DG^{\square} = AD^{\square} + AG^{\square}$ (§. 103.)
$CD^{\square} = AD^{\square}$ und $FG^{\square} = AG^{\square}$ vermöge der Constr.

$DG^{\square} = CD^{\square} + FG^{\square}$ (§. 9. Ar.)

§. 110.

Soll ein Quadrat gemacht werden, das so groß ist, als drey gegebene Quadrate, z. E. als die Qua-

drate

drate FMRG, CPFD, ALHD (Fig. 60.) so suche man erst auf die vorige Art die Seite eines Quadrats, das so groß ist, als zwey der gegebenen Quadrate. An einem Endpunct dieser Seite DG errichte man eine senkrechte Linie DB, mache dieselbe so groß, als die Seite des dritten Quadrats AB, und ziehe die Hypothenuse BG, so muß dieses die Seite des verlangten Quadrats seyn, das so groß ist, als alle drey Quadrate zusammen genommen. Denn

$$BG^{\square} = DG^{\square} + DB^{\square} \quad (\S.\ 103.)$$
$$DG^{\square} = FG^{\square} + CD^{\square} \quad (\S.\ 109.)$$

$$BG^{\square} = FG^{\square} + CD^{\square} + DB^{\square} \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$
$$AB^{\square} = DB^{\square}$$

$$BG^{\square} = FG^{\square} + CD^{\square} + AB^{\square} \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

Hieraus wird man leicht einsehen, wie man auch ein Quadrat machen könne, das so groß ist, als 4, oder 5, oder 6, oder noch mehr gegebene Quadrate.

§. 111.

Lehrsatz. **Eine Linie, welche aus dem Mittelpuncte eines Cirkels senkrecht auf eine Chorde gezogen wird, theilt die Chorde, und wenn man sie verlängert, auch den Bogen in zwey gleiche Theile.**

Es sey (Fig. 45. Tab. 3.) C der Mittelpunct des Cirkels und CB senkrecht auf QR, so ist

$$QG = GR$$
$$\text{und } QB = BR$$

Beweis.

Man ziehe die Halbmesser, CQ und CR, so müssen die beyden Triangel CQG und CRG rechtwink-

winklicht seyn, weil CG senkrecht auf QR steht, vermöge der angenommenen Bedingung. Nun ist

$$\begin{array}{rcll} CQ & = & CR & (\S.\ 29.) \\ CG & = & CG & \\ \hline QG & = & GR & \\ \text{und } \sphericalangle o & = & \sphericalangle u & (\S.\ 106.) \\ \hline QB & = & BR & (\S.\ 36.) \end{array}$$

§. 112.

Eine Figur heißt in den Cirkel beschrieben, wenn alle Seiten der Figur Chorden des Cirkels, und daher auch alle Winkel derselben Peripheriewinkel sind. Von dem Cirkel sagt man alsdenn, daß er um die Figur beschrieben sey, in welchem Falle also die Peripherie desselben durch alle Spitzen der Winkel gehen muß.

§. 113.

Wenn sich die Peripherie des Cirkels geometrisch in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zergliedern liesse, so würde es nicht schwer seyn, jede verlangte reguläre Figur in den Cirkel geometrisch zu beschreiben; denn theilt man die Peripherie in so viel gleiche Theile, als die Figur Seiten haben soll, und zieht die Chorden dieser Bogen, so muß nothwendig eine reguläre Figur entstehen, weil die Chorden gleicher Bogen einander gleich, (§. 78.) und die Winkel an der Peripherie, die auf gleichen Bogen stehen, auch von einer Grösse sind. (§. 85.) Also würde man z. E. ein reguläres Viereck, d. i. ein Quadrat in einen Cirkel beschreiben können, wenn man durch ein Paar Diameter, die einander rechtwinklicht durchschneiden, die Peripherie in vier gleiche Theile zergliederte. (§. 53.) Denn ist (Fig. 70.)

der

der Bogen pa = af = fl = lp, und folglich jeder 90 Grad, so muß die Figur p a fl vier gleiche Seiten (§. 78.) und auch vier rechte Winkel haben, weil jeder Winkel auf einer halben Peripherie stehet. (§. 84.) Wird nun jeder vierte Theil der Peripherie wieder halbirt, welches geometrisch geschehen kann, (§. 50.) so erhält man Achtel von der ganzen Peripherie, und durch die Chorde dieser Bogen die Seiten eines regulären Achtecks; woraus sich ferner begreifen läßt, wie man ein 16 Eck, ein 32 Eck u. s. f. geometrisch in den Cirkel beschreiben könne. Allein in sehr vielen andern Fällen ist eine geometrische Eintheilung der Peripherie in gleiche Theile nicht möglich; denn so läßt sich dieselbe nicht in 7, oder in 13, oder in 17, u. s. f. gleiche Theile zergliedern, daher pflegt man in dergleichen Fällen zu einer mechanischen Construction seine Zuflucht zu nehmen. Nemlich man dividirt 360 Grad durch die Zahl der Seiten, und setzt durch Hülfe des Transporteurs an den Mittelpunct des Cirkels einen Winkel von so viel Graden, als der Quotient anzeigt. Die Schenkel dieses Winkels verlängert man bis an die Peripherie, so wird dadurch ein Bogen abgeschnitten, den man so vielmal in der ganzen Peripherie herumtragen kann, als die Figur Seiten haben soll. Z. E. Soll man ein reguläres Fünfeck in den Cirkel beschreiben, so dividire man 360° durch 5, wodurch 72° entsteht, und trage einen Winkel von 72 Grad durch Hülfe des Transporteurs an das Centrum C (Fig. 69.) und ziehe die Schenkel CA und CF; der Bogen AF muß also der fünfte Theil von der Peripherie seyn, und sich fünfmal in derselben herum tragen lassen.

§. 114.

§. 114.

Lehrsatz. Die Winkel eines regulären Vielecks werden durch die Halbmesser des Cirkels, in welchen es beschrieben ist, in zwey gleiche Theile zergliedert.

Es sey (Fig. 68. Tab. 5.) ein reguläres Sechseck in den Cirkel beschrieben, und CQ ein Halbmesser des Cirkels, so ist

$$c = x$$

Beweis.

Man ziehe noch die Halbmesser CD und CG, so ist

CD	=	CG	(§. 29.)
DQ	=	QG	(§. 15.)
CQ	=	CQ	(§. 9. Arithm.)
c	=	x	(§. 41.)

§. 115.

Aus dem vorigen Beweise erhellt zugleich, daß die Halbmesser eines Cirkels, in welchem ein reguläres Vieleck beschrieben worden ist, dasselbe in lauter gleiche Triangel zertheilen.

§. 116.

Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechsecks ist so groß, als der Radius desjenigen Cirkels, in welchen es beschrieben ist.

Es sey (Fig. 68.) GB die Seite eines regulären Sechsecks, und CG ein Radius, so ist

$$GB = CG.$$

Beweis.

Beweis.

In dem Triangel CBG muß der Winkel BCG den sechsten Theil von 360°, d. i. 60 Grad enthalten, weil das Maaß desselben, der Bogen BG, der sechste Theil der Peripherie ist. Die übrigen beyden Winkel CBG und CGB müssen daher 180° — 60° d. i. 120° in der Summe ausmachen. (§. 68.) Da aber die Seiten CB und CG als Halbmesser eines Cirkels gleich sind, so müssen auch die Winkel CBG und CGB einerley Grösse haben, (§. 74.) und folglich jeder 60 Grad betragen. Weil nun also in dem Triangel CBG alle Winkel 60° enthalten, so muß der Triangel gleichseitig seyn, und daher auch

GB = CG (§. 77.)

§. 117.

Man kann also in einem gegebenen Cirkel sehr leicht ein reguläres Sechseck beschreiben, wenn man den Halbmesser sechsmal in der Peripherie herumträgt, und die Sehnen der Bogen ziehet. Theilt man nun den sechsten Theil der Peripherie in zwey gleiche Theile, so erhält man ein reguläres Zwölfeck, woraus man ferner sehen kann, wie sich ein 24 Eck u. s. w. in einem Cirkel beschreiben läßt.

§. 118.

Aufgabe. Die Summe aller Winkel in einem jeden geradelinichten Vielecke zu finden.

Auflösung.

Man multiplicire 180 Grad durch die Zahl der Seiten weniger zwey, so enthält das Product die Summe aller Winkel eines geradelinichten Vielecks.

So ist z. E. die Summe aller Winkel in einem Fünfeck, es mag regulär oder irregulär seyn, 180 × 3, d. i. 540 Grad, in einem Sechseck 180 × 4. d. i. 720, in einem Siebeneck 180 × 5, d. i. 900 Grad, u. s. f.

Beweis.

Wenn man in einer mittlern Gegend eines Vielecks einen beliebigen Punct erwählt, und von demselben gerade Linien in die Winkel des Vielecks zieht, so wird man so viel Triangel erhalten, als die Figur Seiten hat. Zieht man z. E. (Fig. 67. Tab. 5.) aus dem Puncte C in dem Fünfeck ABDFE die geraden Linien CD, CF, CE, CA und CB, so wird man fünf Triangel erhalten, deren Winkel zusammengenommen die Winkel des Fünfecks ausmachen, wenn man davon die Winkel um den Punct C abzieht. Nun betragen aber alle Winkel um den Punct C 360, d. i. 2 × 180 Grad, (§. 57.) und die Winkel in jedem Triangel 180, folglich in 5 Triangeln 5 × 180°. (§. 68.) Zieht man nun 2 × 180° von 5 × 180°, so bleibt unstreitig 3 × 180° für die Summen aller Winkel in einem Fünfeck übrig. In einem Sechseck hätte man daher 2 × 180° von 6 × 180°, wodurch 4 × 180° entstehet, in einem Siebeneck 2 × 180° von 7 × 180°, welches 5 × 180° ist, subtrahiren müssen, um die Summe aller Winkel zu erhalten.

Man kann sich auch von diesem Satze folgendergestalt überzeugen: Durch die Diagonalen läßt sich jedes Vieleck in so viel Triangel zergliedern, als die Figur Seiten hat, weniger zwey. So würde man z. E. das Fünfeck (Fig. 85. Tab. 9.) in drey Triangel abtheilen können. Die Winkel dieser drey

Triangel, d. i. 3 ✕ 180°, würden daher so viel betragen, als alle Winkel des Fünfecks. Aus einem Sechseck würde man durch Diagonalen 4 Triangel, aus einem Siebeneck 5 Triangel u. s. f. erhalten; folglich würde die Summe aller Winkel in einem Sechseck 4 ✕ 180°, in einem Siebeneck 5 ✕ 180° seyn müssen.

§. 119.

Weil in einem regulären Vielecke alle Winkel einander gleich sind, so darf man nur die Summe der Winkel durch die Zahl der Seiten dividiren, wenn man den Winkel wissen will, den zwey Seiten eines regulären Vielecks mit einander machen, und den man auch sonst den **Polygonwinkel** zu nennen pflegt. Z. E. die Summe aller Winkel eines Fünfecks ist 3 ✕ 180 Grad; folglich ist der Polygonwinkel in einem regulären Fünfeck $\frac{3 \times 180°}{5}$ d. i. 108 Grad. Die Summe aller Winkel in einem Sechseck ist 4 ✕ 180°, folglich der Polygonwinkel eines regulären Sechsecks $\frac{4 \times 180°}{6}$ d. i. 120 Grad. Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{3 \times 180}{5} &= \frac{3 \times 180}{5} \\ \text{und } \frac{4 \times 180}{6} &= \frac{4 \times 180}{6} \end{aligned}\right\} \text{(§. 56. Ar.)}$$

woraus also erhellet, daß man überhaupt den Polygonwinkel eines regulären Vielecks bekömmt, wenn man 180 Grad durch die Zahl der Seiten dividirt, und den Quotienten durch die Zahl der Seiten weniger zwey multiplicirt.

§. 120.

Lehrsatz. Um jedes reguläre Vieleck läßt sich ein Cirkel beschreiben.

Beweis.

Man theile die Polygonwinkel eines regulären Vielecks, z. E. des regulären Sechsecks (Fig. 68.) durch die geraden Linien CD, CQ, CG, CB, CA, CN in zwey gleiche Theile, und verlängere dieselben, bis sie zusammenstossen. Da nun, vermöge der Construction u und e halbe Polygonwinkel, und also einander gleich sind, so ist auch

CD = CQ (§. 76.)

ferner aus eben dem Grunde, weil x = y

CQ = CG (§. 76.)

und also auch

CG = CB
CB = CA
CA = CN
CN = CD

Es läßt sich daher mit dem Halbmesser CD aus dem Puncte C ein Cirkel beschreiben, dessen Peripherie durch alle Ecken des Vielecks gehen muß, weil diese alle gleich weit von dem Puncte C abstehen.

§. 121.

Man erhält also, wie man aus dem vorigen Beweise sehen kann, das Centrum desjenigen Cirkels, in welchen ein reguläres Vieleck, von welchem die Seite gegeben ist, beschrieben werden kann, wenn man an die Endpuncte dieser Seiten die halben Polygonwinkel trägt, und die Schenkel derselben verlängert, bis sie zusammenstossen. Sollte man daher z. E. über die gegebene Linie AF (Fig. 69.) ein reguläres

Fünf-

Fünfeck beschreiben, so suche man erstlich den Polygonwinkel, welcher 108° ist, (§. 119.) die Hälfte davon, nemlich 54 Grad, trage man durch Hülfe des Transporteurs sowohl an den Punct A, als auch an den Punct F, und verlängere die Schenkel, bis sie einander durchschneiden. Aus dem Durchschnittspuncte C beschreibe man mit dem Halbmesser CF einen Cirkel, so muß sich AF fünfmal in demselben herumtragen lassen. Denn da die beyden Winkel CAF und CFA, vermöge der Construction, 108 Grad ausmachen, so beträgt der Winkel C oder der Bogen AF 180° — 108°, d. i. 72°, (§. 68.) welches der fünfte Theil von der Peripherie ist. Hieraus wird man auch ferner einsehen, wie man andre reguläre Vielecke über eine gegebene Linie beschreiben könne.

§. 122.

Ein reguläres Sechseck läßt sich geometrisch über eine gegebene Linie beschreiben, wenn man über dieselbe einen gleichseitigen Triangel errichtet, und aus der Spitze desselben einen Cirkel beschreibet. Denn da die Seite des Sechsecks dem Halbmesser gleich ist, (§. 116.) so muß sich in diesem Falle die gegebene Linie sechsmal in dem damit beschriebenen Cirkel herumtragen lassen.

Drittes Capitel.

Von der Ausmessung der Figuren.

§. 123.

Weil alles Ausmessen einer Grösse in der Vergleichung derselben mit einer bekannten Grösse von eben der Art bestehet, (§. 2. Vorber.) so wird man leicht einsehen, daß man zum Maaß der Flächen wieder eine Fläche annehmen muß. Man hat daher gewisse Quadrate hierzu erwählet, weil sich keine der übrigen Figuren zu dieser Absicht so gut schickt, und ihnen den Namen von der Länge ihrer Seiten gegeben. So heißt also eine **Quadrat- oder Flächen-Ruthe**, ein solches Quadrat, dessen Seite eine Ruthe lang ist; ein **Quadrat-Schuh** ein Quadrat, dessen Seite einen Schuh, ein **Quadrat-Zoll**, ein Quadrat, dessen Seite einen Zoll, und eine **Quadrat-Linie**, ein Quadrat, dessen Seite eine Linie beträgt. Hieraus wird man auch verstehen, was eine Quadrat-Meile, eine Quadrat-Elle, u. s. w. im gemeinen Leben bedeutet. Man bezeichnet aber die Flächen-Maaße auf eben die Art, wie die Längen-Maaße, nur daß man, wo es nöthig ist, sie von diesen zu unterscheiden, entweder ein kleines Quadrat, oder den Buchstaben q zu dem gewöhnlichen Zeichen setzt. So bedeutet z. E. der Ausdruck $435\,\square^{\circ}$, $73\,\square'$, $52\,\square''$ eine Fläche, die 435 Quadrat-Ruthen, 73 Quadrat-Schuh, und 52 Quadrat-Zoll enthält. Weil man nun alle Flächen durch Quadrate auszumessen pflegt, so ist daher der Ausdruck quadriren entstanden, welcher nichts anders sagen will, als den Inhalt einer Fläche bestimmen.

§. 124.

Aufgabe. Ein Quadrat auszumessen.

Auflösung.

Man untersuche, wie oft die Seite desjenigen Quadrats, das man zum Maaße angenommen hat, in der Seite des auszumessenden Quadrats enthalten ist; die Zahl, welche dieses anzeigt, multiplicire man in sich selbst, so giebt dieses Product eine Zahl, aus welcher man ersehen kann, wie oft das auszumessende Quadrat das andre in sich faßt. Z. E. es sey (Fig. 61. Tab. 5.) das Quadrat DAGB auszumessen, und das kleinere Quadrat DFCQ sey das Maaß; so messe man die Seite des grössern Quadrats DB durch die Seite des kleinern Quadrats DQ. Nun enthält die Seite DB die Seite DQ dreymal. Die Zahl 3 multiplicire man also in sich selbst, so zeigt das Product 3×3 d. i. 9 an, daß das kleinere Quadrat DFCQ in dem grössern Quadrate DAGB neunmal enthalten seyn müsse.

Beweis.

Weil die Seite des kleinern Quadrats DQ in der Seite des grössern Quadrats DB dreymal enthalten ist, so sieht man leicht ein, daß sich das kleinere Quadrat über die Linie DB dreymal neben einander setzen läßt, und weil die Seiten eines Quadrats gleich sind, so muß man das kleinere Quadrat auch eben so oft über die Linie DA, und folglich die Reihe der drey Quadrate, die über DB stehen, dreymal über einander setzen können, um das grössere Quadrat auszufüllen. Das kleinere Quadrat steckt daher in dem auszumessenden grössern dreymal drey, d. i. neunmal.

§. 125.

Hieraus wird man die Urſache einſehen, warum man in der Arithmetik diejenigen Producte, wo eine Zahl in ſich ſelbſt multiplicirt wird, Quadratzahlen nennt.

§. 126.

Man pflegt insgemein zu ſagen, daß durch die Multiplication einer Linie mit einer Linie allemal eine Fläche entſtehe, welches aber unrichtig iſt, indem man in vielen Fällen durch die Multiplication der Linien auch wieder eine Linie erhält. Ueberhaupt aber multiplicirt man in dergleichen Fällen eigentlich nicht die Linien, ſondern die Zahlen in einander, welche das Verhältnis der Linien gegen die angenommene Einheit ausdrücken. Das vorige Beyſpiel muß man ſich alſo folgendergeſtalt vorſtellen. Wie ſich verhält 1 zu 3 × 3, ſo verhält ſich das kleinere Quadrat DFCQ zu dem gröſſern Quadrate DAGB.

§. 127.

Das Verhältnis zweyer Quadrate muß man alſo nicht nach dem einfachen Verhältnis ihrer Seiten, ſondern nach dem Verhältniſſe der Quadratzahlen ihrer Seiten beurtheilen. Iſt die Seite eines Quadrats zweymal ſo groß, als die Seite eines andern Quadrats, ſo iſt das erſte Quadrat ſelbſt viermal ſo groß, als das andere Quadrat. Iſt die Seite eines Quadrats fünfmal gröſſer, als die Seite eines andern, ſo iſt das erſte Quadrat ſelbſt 25mal gröſſer als das andre, u. ſ. w.

§. 128.

Wenn man daher eine Quadratruthe durch einen Quadratſchuh ausmeſſen will, ſo muß man 10

in

in sich selbst multipliciren, weil die Länge eines Quadratschuhs nach der geometrischen Eintheilung in der Länge einer Quadratruthe 10mal enthalten ist. Da nun 10 × 10 Hundert macht, so ist klar, daß eine Quadratruthe 100 Quadratschuh, und folglich auch ein Quadratschuh 100 Quadratzoll, und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien enthält. Wollte man aber im Längenmaaße die sogenannte Rheinländische Eintheilung annehmen, nach welcher die Ruthe in 12 Schuh, der Schuh in 12 Zoll u. s. f. getheilt wird, so müste man auf die Quadratruthe 144 Quadratschuh, auf den Quadratschuh 144 Quadratzoll u. s. f. rechnen, weil 12 × 12 = 144.

§. 129.

Aufgabe. Ein Rectangulum auszumessen.

Auflösung.

Man untersuche, wie oft die Seite desjenigen Quadrats, das man zum Maaßstabe erwählt hat, in ein Paar anliegenden Seiten enthalten ist, und multiplicire die beyden Zahlen, welche dieses anzeigen, in einander, so muß das Product so viel Einheiten enthalten, als das auszumessende Rectangulum Quadrate enthält. Z. E. es sey (Fig. 62. Tab. 5.) das Rectangulum GPRF auszumessen, und das Quadrat GNCQ sey das Maaß. Die Seite GQ des Quadrats GNCQ ist in der Seite GF des auszumessenden Rechtecks viermal, und in der Seite GP 3mal enthalten. Man multiplicire daher 4 in 3, so ist das Product 4 × 3 oder 12 der Inhalt des Rechtecks, nemlich das angenommene Quadrat GNCQ steckt in dem Rechtecke GPRF zwölfmal.

Beweis.

Weil die Linie GQ in der Linie GF viermal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat GNCQ viermal über die Linie GF setzen, und weil GQ oder GN in der Linie GP dreymal enthalten ist, so kann man diese Reihe von 5 Quadraten 3mal über einander stellen, um das Rechteck auszufüllen, wodurch also nothwendig 4 ✕ 3 d. i. 12 Quadrate, wie GNCQ entstehen müssen.

§. 130.

Aufgabe. Ein schiefwinklichtes Parallelogram auszumessen.

Auflösung.

Man erwähle sich eine Seite zur Grundlinie, und ziehe von derselben eine gerade Linie senkrecht auf die entgegengesetzte Seite, welche alsdenn die Höhe des Parallelograms vorstellen wird. (§. 99.) Hierauf messe man sowohl die Grundlinie, als auch die Höhe, und multiplicire beyde in einander, so ist das Product der verlangte Inhalt. Es sey z. E. das Parallelogram NDSB (Fig. 63. Tab. 5.) gegeben, die Grundlinie NB = 35‴, und die Höhe DC = 32‴, so ist der Inhalt desselben NB ✕ DC, d. i. 35 ✕ 32, oder wenn man würklich multipliciret, 1120□‴ d. i. 11□″, 20□‴.

Beweis.

Man verlängere die Seite NB, und ziehe auf diese verlängerte Seite die Linie SA senkrecht, so muß das rechtwinklichte Parallelogram DSAC, welches hierdurch entsteht, dem schiefwinklichten Parallelogram NDSB gleich seyn. (§. 98.) Nun ist

der

der Inhalt von dem Rechteck DSAC das Product DS × DC, folglich muß auch dieses Product, welches wegen der Gleichheit der Seiten DS und NB (§. 93.) eben so groß ist, als das Product NB × DC den Inhalt des schiefwinklichten Parallelograms anzeigen.

§. 131.

Wenn also zwey Parallelogrammen gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben, so müssen sie sich verhalten, wie ihre Höhen, und sind die Höhen gleich, wie ihre Grundlinien. Denn es heisse das erste Parallelogram P, seine Grundlinie G, seine Höhe aber H, so ist der Inhalt desselben G × H. (§. 130.) Das andere Parallelogram heisse p, seine Grundlinie g, seine Höhe aber h, so ist der Inhalt desselben das Product g × h. (§. 130.) Folglich

$$P : p = G \times H : g \times h$$

Ist nun $G = g$

$$P : p = G \times H : G \times h \quad \text{(§. 9. Ar.)}$$

$$P : p = \frac{G \times H}{G} : \frac{G \times h}{G} \quad \text{(§. 18. Ar.)}$$

d. i. $P : p = H : h$ (§. 19. Arithm.)

Auf eben die Art, wenn

$H = h$ und

$$P : p = G \times H : g \times h$$

$$P : p = G \times H : g \times H \quad \text{(§. 9. Ar.)}$$

$$P : p = \frac{G \times H}{H} : \frac{g \times H}{H} \quad \text{(§. 18. Ar.)}$$

d. i. $P : p = G : g$ (§. 19. Ar.)

§. 132.

§. 132.

Da ein jeder geradelinichter Triangel die Hälfte eines Parallelograms ist, welches eben dieselbe Grundlinie und Höhe hat, (§. 102.) so muß der Inhalt eines geradelinichten Triangels ein halbes Product aus seiner Grundlinie in seine Höhe, oder welches eben so viel sagen will, ein Product aus der halben Höhe in die ganze Grundlinie, oder ein Product aus der ganzen Höhe in die halbe Grundlinie seyn. Soll man daher einen Triangel, z. E. den Triangel NFQ (Fig. 64. Tab. 5.) ausrechnen, so erwähle man eine Seite, z. E. NQ zur Grundlinie, ziehe aus der entgegengesetzten Spitze die senkrechte Linie FB, welche in diesem Falle die Höhe vorstellt, (§. 101.) so ist $\frac{1}{2}$ NQ × FB der Inhalt des Triangels NFQ. Aus eben dem Grunde würde der Inhalt des Triangels ACB (Fig. 65.) wenn man AB zur Grundlinie annehmen wollte, das Product $\frac{1}{2}$ AB × CG seyn. (§. 101.) Es versteht sich von selbst, daß man hier, wie bey den vorigen Beyspielen, sowohl die Höhe als die Grundlinie messen und in Zahlen verwandeln muß, wenn man sie wirklich in einander multipliciren will.

§. 133.

Weil sich Parallelogramme, wenn sie gleiche Grundlinien haben, wie die Höhen, und wenn sie gleiche Höhen haben, wie die Grundlinien verhalten, (§. 131.) so ist klar, daß sich auch Triangel von gleichen Grundlinien, wie die Höhen, und Triangel von gleichen Höhen, wie die Grundlinien verhalten müssen, weil die Hälften eben das Verhältnis haben, wie die Ganzen. (§. 103. Arithm.)

§. 134.

§. 134.

Da sich alle geradelinichte Figuren durch Diagonalen in Triangel zergliedern lassen, so sieht man leicht ein, wie es möglich sey, jede geradelinichte Figur auszumessen. Denn wäre z. E. das irreguläre Fünfeck ABSNQ (Fig. 66. Tab. 5.) gegeben, so dürfte man es nur durch die Linien SA und SQ, in die drey Triangel, ABS, ASQ und SQN zergliedern, jeden Triangel nach den vorigen Regeln ausrechnen, und den Inhalt aller drey Triangel zusammen addiren, welche Summe der Inhalt der ganzen Figur seyn muß.

§. 135.

Ist die Figur, welche man quadriren soll, regulär, wie z. E. das Sechseck ABGQDN, (Fig. 68. Tab. 5.) so kann man die Rechnung geschwinder vollenden, wenn man die Halbmesser CD und CD, ferner die senkrechte Linie CP aus dem Mittelpuncte auf die Seite DQ ziehet, und das Product $\frac{1}{2}$ CP $\times$ DQ durch die Anzahl der Seiten, und also in diesem Falle durch 6 multiplicirt, weil jedes reguläre Vieleck durch die Halbmesser, welche aus den Spitzen seiner Winkel gezogen werden, in lauter gleiche Triangel zergliedert wird, (§. 115.) und die Anzahl solcher Triangel eben so groß seyn muß, als die Zahl der Seiten des Vielecks. Ist nun der Inhalt dieses Sechsecks $\frac{1}{2}$ CP $\times$ DQ $\times$ 6, so ist klar, daß ein Triangel eben so groß seyn würde, als dieses Sechseck, wenn seine Höhe CP, und seine Grundlinie 6 $\times$ DQ wäre. CP ist der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte, und 6 $\times$ DQ die Summe aller Seiten dieses Sechsecks, folglich würde ein

Tri-

Triangel einer regulären Figur gleichen, wenn seine Grundlinie eben so groß wäre, als die Summe aller Seiten, welche man auch den Perimeter der Figur zu nennen pflegt, und seine Höhe so groß, als der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte.

§. 136.

Wenn man in einen Cirkel verschiedene reguläre Vielecke beschreibet, so wird man finden, daß sie dem Cirkel immer näher kommen, je grösser die Anzahl ihrer Seiten wird; so ist z. E. (Fig. 70. Tab. 5.) das Achteck nicht so viel von dem Cirkel unterschieden, als das Viereck, und das Sechzehneck noch weniger als das Achteck. Wollte man hier noch weiter gehen, und Polygone von mehr Seiten beschreiben, so würde man endlich ein solches Vieleck erhalten, dessen Seiten fast ganz in die Peripherie fielen, und dessen Unterschied von dem Cirkel nicht mehr zu bemerken wäre, in welchem Falle der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte mit dem Halbmesser des Cirkels einerley seyn müßte. Man stellt sich daher den Cirkel als eine reguläre geradlinichte Figur vor, die unendlich viel Seiten hat; und da eine reguläre Figur einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie so groß ist, als die Summe aller Seiten, oder der Umfang der Figur, und dessen Höhe so viel beträgt, als der Abstand einer Seite von dem Mittelpuncte, (§. 133.) so muß auch der Cirkel die Grösse eines Triangels haben, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Cirkels gleichet, und daher läßt sich der Cirkel quadriren, d. i. der Inhalt desselben finden, wenn man seine Peripherie in den halben Radium, oder welches eben so viel ist,

in

in den vierten Theil des Diameters multiplicirt. Aus eben der Ursache muß auch der Inhalt eines Sectors ein Product aus seinem Bogen in den halben Radium seyn.

§. 137.

Weil die Peripherie des Cirkels eine krumme Linie ist, und daher durch eine gerade Linie nicht unmittelbar gemessen werden kann, so hat man sich seit langen Zeiten Mühe gegeben, ein Paar Zahlen zu finden, welche das Verhältnis des Diameters zu der Peripherie ausdrücken. Bis jetzt hat man noch kein Verhältnis entdeckt, das nach der größten mathematischen Schärfe richtig wäre; denn die bisherigen sogenannten neuen Erfindungen von der Quadratur des Cirkels sind alle unrichtig, und rühren meistentheils von Leuten her, die keine richtigen Begriffe von diesen Dingen haben. Nach des Archimedis Bestimmung verhält sich der Diameter zu der Peripherie ohngefehr wie 7 : 22, welches Verhältnis aber nicht so genau ist, als das gewöhnliche, dessen man sich meistentheils in der Ausübung zu bedienen pflegt, nemlich 100 : 314, bey welchem der Fehler nicht viel über $\frac{1}{1000}$ der Einheit beträgt, und welches eigentlich die ersten Zifern desjenigen Verhältnisses sind, welches Ludolph von Cölln gefunden hat, nach dessen Berechnung sich der Diameter zu der Peripherie verhält wie

100000000000000000000000000000000
zu 314159265358979323846264338237950

Weil aber die Zahlen dieses Verhältnisses Glieder von einer Reihe sind, welche ins unendliche fortgeht, so ist klar, daß man es nicht für ganz vollkommen richtig halten kann, ob sich gleich so viel erweisen

läßt,

läßt, daß der Fehler, der hiebey noch begangen wird, nicht

$$\frac{1}{100000000000000000000000000000}$$

der Einheit ausmacht.

§. 138.

Wenn wir also unterdessen annehmen, daß sich der Diameter zur Peripherie beynahe wie 100 : 314 verhält, so läßt sich durch Hülfe der Regel Detri zu dem gegebenen Diameter eines Cirkels die Peripherie, und daher auch nach §. 134. der Inhalt des Cirkels selbst leicht finden. Z. E. es sey der Diameter eines gegebenen Cirkels 24′, so schliesse man folgendergestalt, um die Peripherie zu finden:

100 : 314 = 24′ : per.

24

1256

628

100) 75,36 (75′ $\frac{36}{100}$ = 75′, 3″, 6‴ = per.

Verlangt man nun den Inhalt des Cirkels, so multiplicire man die gefundene Peripherie 7536‴ durch den vierten Theil des Diameters, wobey nur zu merken ist, daß man diesen vierten Theil auch durch Linien ausdrücken muß, weil die Peripherie Linien enthält. Der vierte Theil des Diameters ist in dem gegenwärtigen Falle 6′ oder 600‴

7536‴

600‴

Inhalt des Cirkels 4521600□‴

d. i. 4□°, 52□′, 16□″, (§. 128.)

§. 139.

§. 139.

Soll der Inhalt eines gegebenen Sectors, z. E. des Sectors ABNF (Fig. 71. Tab. 5.) gefunden werden, so messe man den Halbmesser AB und den Winkel ABN. Es sey z. E. der Halbmesser AB = 18 Schuh, und der Winkel ABN = 80 Grad; nun untersuche man erstlich, wie viel der Bogen AFN, der eben so viel Grade enthält, als der Winkel ABN, nach dem Längenmaaße beträgt. Dieses aber läßt sich finden, wenn man durch Hülfe des vorigen Verhältnisses aus dem Halbmesser die halbe Peripherie berechnet, (weil man hier die ganze Peripherie nicht nöthig hat,) und hernach so schliesset, wie sich die halbe Peripherie in Graden, zu dem Bogen AFN in Graden verhält, so verhält sich auch die halbe Peripherie im Längenmaaße zu dem Bogen AFN in solchem Maaße. Weiß man nunmehr den Bogen AFN nach eben dem Längenmaaße, wodurch der Halbmesser bestimmt worden ist, so multiplicire man denselben in den halben Radium, so zeigt das Product den verlangten Inhalt des gegebenen Sectors an. (§. 134.) Die Rechnung selbst würde folgende seyn. Weil sich die Halben wie die Ganzen verhalten, so kann man nicht nur schliessen, daß sich 100 zu 314 verhält, wie der ganze Diameter zu der ganzen Peripherie, sondern auch wie der halbe Diameter zu der halben Peripherie. Folglich läßt sich die halbe Peripherie aus dem gegebenen Halbmesser AB = 18′ also finden:

100 : 314 = 18′ : $\frac{1}{2}$ per.

18

2512

314

100) 5652 (56′ $\frac{52}{100}$ = 56′, 5″, 2‴ = $\frac{1}{2}$ per.

Da nun die halbe Peripherie 180° und der Bogen des Sectors 80° enthält, so schliesse man ferner:

$\frac{180°}{2)\ 9}$: $\frac{80°}{4}$ = 5652‴ : AFN

22608 (4

9) 2512‴ = Bog. AFN

900‴ = 9′ = $\frac{1}{2}$ AB

Inhalt des Sectors

ABNF = 2260800 □‴ = 2 □°, 26 □′, 08 □″

(§. 128.)

§. 140.

Weil der Sector ABNF (Fig. 71.) wenn man die Sehne AN ziehet, aus dem geradelinichten Triangel ABN, und dem Segment AFNA besteht, so ist klar, daß sich der Inhalt des Segments finden läßt, wenn man den Inhalt des Triangels ABN, von dem Inhalte des Sectors ABNF subtrahirt.

Viertes Capitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 141.

Man nennt die Figuren von einer Art **ähnlich**, in welchen gleiche Winkel und proportionirliche Seiten angetroffen werden, und zeigt die Aehnlichkeit durch das Zeichen ∽ an, wie schon §. 25. ange-

angemerkt worden ist. Es gehört also zur Aehnlichkeit der Figuren dreyerley, nemlich erstlich eine gleiche Anzahl von Seiten, denn ein Dreyeck kann z. E. einem Vierecke nicht ähnlich seyn; zweytens einerley Winkel; und drittens einerley Verhältnis derjenigen Seiten, die einerley Winkel einschliessen.

§. 142.

Es ist daher jeder gleichseitige Triangel einem andern gleichseitigen Triangel, jedes Quadrat einem andern Quadrate, jedes reguläre Fünfeck einem andern regulären Fünfecke, und überhaupt sind alle reguläre Figuren, die eine gleiche Anzahl von Seiten haben, folglich auch alle Cirkel einander ähnlich, weil man sich die Cirkel als reguläre Vielecke von einer unendlichen Anzahl Seiten vorstellen kann.

§. 143.

Lehrsatz. **Wenn in einem geradelinichten Triangel eine Linie parallel mit einer Seite gezogen, und bis an die andern beyden Seiten des Triangels verlängert wird, so verhalten sich die beyden Seiten, welche diese Parallellinie durchschneidet, eben so, wie die obern oder untern Theile, welche durch dieselbe auf den beyden Seiten abgeschnitten werden.**

Es sey (Fig. 72. Tab. 5.) in dem Triangel PQR die Linie NM parallel mit der Seite QR, so muß sich verhalten

$$PQ : PR = PN : PM$$

oder

$$PQ : PR = NQ : MR$$

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien NR und MQ, so ist

$$\triangle NMQ = \triangle NMR \text{ (§. 100.)}$$
$$\triangle NPM = \triangle NPM$$

$\triangle NMQ + \triangle NPM = \triangle NMR + \triangle NPM$ (§. 13. Ar.)
d. i. $\triangle QPM = \triangle RPN$ (§. 10. Ar.)

Nimmt man nun in den beyden Triangeln QPM und NPM die Seiten PQ und PN zu Grundlinien an, so haben sie eine gemeinschaftliche Spitze M und folglich einerley Höhe, (§. 101.) welches auch von den Triangeln RPN und NPM gilt, welche die gemeinschaftliche Spitze N und daher einerley Höhe haben, wenn man die Seite PR und PM als die Grundlinien betrachtet. Es verhält sich daher

$\triangle QPM : \triangle NPM = PQ : PN$ (§. 133.)
und weil $\triangle QPM = \triangle RPN$ nach dem vorigen Beweise

$\triangle RPN : \triangle NPM = PQ : PN$ (§. 9. Ar.)
Ferner $\triangle RPN : \triangle NPM = PR : PM$ (§. 133.)

$PQ : PN = PR : PM$ (§. 11. Ar.)

alternando $PQ : PR = PN : PM$ (§. 100. Ar.)

Aus der vorigen Proportion

§ $PQ : PN = PR : PM$, folgt

$PQ - PN : PN = PR - PM : PM$ (§. 106. Ar.)
d. i. $NQ : PN = MR : PM$

$NQ : MR = PN : PM$ (§. 100. Arithm.)
$PQ : PR = PN : PM$ wie schon erwiesen worden.

$PQ : PR = NQ : MR$ (§. 11. Arithm.)

§. 144.

§. 144.

Lehrsatz. Wenn zwey Seiten eines geradelinichten Triangels durch eine gerade Linie dergestalt durchschnitten werden, daß sich dieselben eben so verhalten, wie die obern oder wie die untern Theile, die dadurch entstehen, so muß diese gerade Linie mit der entgegenstehenden Seite des Triangels parallel seyn.

Es durchschneide die Linie DF (Fig. 73. Tab. 5.) die Seiten AB und AC des Triangels ABC, und es verhalte sich

$$AB : AC = AD : AF$$

so ist DF parallel mit BC.

Beweis.

Will man nicht zugeben, daß DF unter der angenommenen Bedingung parallel mit BC sey, so ziehe man eine andere Linie durch den Punct D parallel mit BC. Diese Parallellinie muß entweder über oder unter DF fallen. Gesetzt, sie falle unter DF, und heisse DN, so verhält sich

$AB : AC = AD : AN$ (§. 143.)

Aber $AB : AC = AD : AF$ vermöge der angenommenen Bedingung.

$AD : AF = AD : AN$. (§. 11. Arithm.)

$AD : AD = AF : AN$ (§. 100. Arithm.)

$AD = AD$

$AF = AN$

Das heißt, der Theil AF ist so groß, wie das Ganze AN. Da nun dieses unmöglich seyn kann, und

man dieſe Unmöglichkeit auch erhalten würde, wenn man annähme, die Parallellinie mit BC durch den Punct D fiele über DF, ſo iſt klar, daß unter der angenommenen Bedingung DF ſelbſt mit BC parallel ſeyn müſſe.

§. 145.

Lehrſatz. Wenn in einem Triangel zwey Winkel einzeln genommen, eben ſo groß ſind, als zwey Winkel in einem andern Triangel, ſo ſind die beyden Triangel einander ähnlich, d. h. es iſt auch der dritte Winkel des erſten Triangels ſo groß, als der dritte Winkel des andern, und die Seiten, welche einerley Winkel einſchlieſſen, und einerley Winkeln gegenüberſtehen, haben in beyden Triangeln einerley Verhältnis.

Es ſey (Fig. 75. Tab. 5.) in den beyden Triangeln CAG und cag

C = c
A = a

ſo iſt △CAG ∽ △cag
d. h. auch G = g
und CA : CG = ca : cg
CA : AG = ca : ag
AG : GC = ag : gc

Beweis.

Die Gleichheit der Winkel G und g folgt ſchon aus der Gleichheit der übrigen beyden. (§. 71.) Daß aber die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Triangeln einſchlieſſen, einerley Verhältnis haben, läßt ſich folgendergeſtalt zeigen. Man trage auf die Schenkel des Winkels C in dem gröſſern Triangel

angel, die beyden Seiten, welche den Winkel c, der ihm gleich ist, in dem kleinern Triangel einschliessen, und mache also

GR = ca
und CQ = cg
Weil nun auch C = c vermöge der Bedingung.

---

so ist, wenn man die Linie RQ ziehet

< CRQ = a (§. 37.)
Und weil A = a vermöge der Bedingung.

< CRQ = A (§. 11. Arithm.)

RQ parallel mit AG (§. 61.)

CA : CG = CR : GQ (§. 143.)
CR = ca und CQ = cg vermöge der Construction.

CA : CG = ca : cg (§. 9. Arithm.)

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch die übrigen Seiten in beyden Triangeln, die einerley Winkel einschliessen, einerley Verhältnis haben. Denn man trage nunmehr auf die Schenkel des Winkels A in dem grössern Triangel, die Seiten ca und cg, welche den gleichen Winkel a in dem andern Triangel einschliessen, und mache

NA = ca
und AM = ag. Wird nun die Linie NM gezogen,
so ist, weil A = a vermöge der Bedingung des Satzes.

< ANM = c (§. 37.)
C = c vermöge der Bedingung des Satzes.

< ANM = C (§. 11. Arithm.)

NM parallel mit CG

CA : AG = NA : AM (§. 143.)
ca = NA und ag = AM vermöge der Constr.

CA : AG = ca : ag

Wenn man die vorige Proportion

CA : CG = ca : cg

und die jetzt erwiesene

CA : AG = ca : ag

mit einander vergleicht, so wird man auch die Wahrheit der dritten, welche noch zur Aehnlichkeit dieser beyden Triangel gehört,

AG : GC = ag : gc

ohne Schwierigkeit einsehen. Denn aus der ersten folgt alternando diese

und aus der andern
CA : ca = CG : cg
CA : ca = AG : ag
) (§. 100. Ar.)

AG : ag = CG : cg (§. 11. Arithm.)

alternando AG : CG = ag : cg (§. 100. Arithm.)

§. 146.

Wenn also in einem Triangel eine Linie, wie NM (Fig. 72) parallel mit einer Seite QR gezogen wird, so muß der obere Theil des Triangels PNM dem ganzen Triangel PQR ähnlich seyn, wodurch, ausser den §. 143. angeführten Proportionen, noch folgende fliessen:

PN : NM = PQ : QR
oder PN : PQ = NM : QR (§. 100. Ar.)
PM : NM = PR : QR
oder PM : PR = NM : QR (§. 100. Ar.)

§. 147.

Lehrsatz. Wenn ein Winkel in einem Triangel so groß ist, als ein Winkel in einem andern Triangel, und die beyden Seiten, welche

che dieſe Winkel einſchlieſſen, in beyden Triangeln einerley Verhältnis haben, ſo ſind dieſe Triangel einander ähnlich.

Es ſey (Fig. 75.) in den Triangeln CAG und cag

$$\frac{\begin{array}{rcl} C & = & c \\ \text{und } CA : CG & = & ca : cg \end{array}}{\text{ſo iſt } \triangle CAG \sim \triangle cag}$$

Beweis.

$$\frac{\begin{array}{rcl} \text{Man mache } CR & = & ca \\ \text{und } CQ & = & cg \\ \text{ſo iſt, weil } C & = & c \text{ vermöge der Bedingung} \end{array}}{\sphericalangle CRQ = a \quad (\S.\ 37.)}$$

Weil nun ferner vermöge der angenommenen Bedingung des Satzes

$$\frac{\begin{array}{rcl} CA : CG & = & ca : cg \\ \text{d. i. } CA : CG & = & CR : CQ \quad (\S.\ 9.\ \text{Ar.}) \end{array}}{RQ \text{ parallel mit } AG \quad (\S.\ 144.)}$$

$$\frac{\sphericalangle CRQ = A \quad (\S.\ 65.)}{\text{Es war aber vorhin } \sphericalangle CRQ = a}$$

$$A = a \quad (\S.\ 11.\ \text{Ar.})$$

und daher der Triangel CAG dem Triangel cag ähnlich. (§. 145.)

§. 148.

Lehrſatz. Wenn alle drey Seiten in einem Triangel eben das Verhältnis haben, wie die Seiten in einem andern Triangel, ſo müſſen die beyden Triangel einander ähnlich ſeyn, d. h. es müſſen auch die Winkel, die von proportionirlichen Seiten eingeſchloſſen

werden, in beyden Triangeln einander gleich seyn.

Wenn (Fig. 75.)

CA : CG = ca : cg
und CG : AG = cg : ag

so ist C = c
G = g
A = a

Beweis.

Man mache wieder CR = ca und CQ = cg, und ziehe die gerade Linie RQ. Weil nun vermöge der angenommenen Bedingung

CA : CG = ca : cg

so verhält sich auch CA : CG = CR : CQ (§. 9. Ar.)

RQ parallel mit AG (§. 144.)

CQ : RQ = CG : AG (§. 146.)
CG : AG = cg : ag vermöge der Bedingung

CQ : RQ = cg : ag (§. 11. Ar.)

CQ : cg = RQ : ag (§. 100. Ar.)
CQ = cg vermöge der Construction

RQ = ag (§. 96. Arithm.)

C = c
∠ CQR = g) (§. 41.)
∠ CQR = G (§. 65.)

G = g (§. 11. Arithm.)
A = a (§. 71.)

§. 149.

Aus diesen drey Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Triangel lassen sich auch dreyerley Arten, ähnliche

che Triangel zu beschreiben, herleiten, wovon in dem folgenden Capitel Beyspiele vorkommen werden.

§. 150.

Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportional-Linie zu finden.

Auflösung.

Es mögen (Fig. 74. Tab. 5.) FB, NR und SQ die drey gegebenen Linien seyn, zu welchen die vierte Proportionallinie gesucht werden soll. Man trage erstlich auf die Schenkel eines Winkels A, den man sich nach Belieben erwählen kann, die ersten beyden, von den gegebenen Linien, so daß $AF = FB$ und $AN = NR$ wird, und ziehe die gerade Linie FN. Auf denjenigen Schenkel, auf welchen man die erste Linie getragen hat, trage man auch die dritte, so daß $AS = SQ$. Durch den Punct S ziehe man die Linie SM parallel mit FN, so muß AM die verlangte vierte Proportionallinie seyn; d. h. es muß sich verhalten

$$FB : NR = SQ : AM$$

Beweis.

Weil vermöge der Construction

FN parallel mit SM

so verhält sich $AF : AN = AS : AM$ (§. 143.)

und weil $AF = FB$, $AN = NR$ und $AS = SQ$ vermöge der Construction

$FB : NR = SQ : AM$ (§. 9. Ar.)

§. 151.

Sollte zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie gefunden werden, in welchem Falle jederzeit

derzeit von einer ſtetigen Proportion die Rede iſt, ſo darf nur die zweyte Linie zweymal geſetzt, und zugleich als die dritte betrachtet werden.

§. 152.

Aufgabe. Zu zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflöſung.

Es mögen (Fig. 29. Tab. 6.) die beyden Linien PA und MC gegeben ſeyn. Man trage dieſelben auf eine gerade Linie neben einander, und mache

$$CN = PA$$
$$\text{und } NG = MC$$

Die Linie CG, welche die Summe der beyden gegebenen Linien iſt, theile man in zwey gleiche Theile, und beſchreibe mit der Hälfte QC den halben Cirkel CBG. Hierauf errichte man aus dem Puncte N, wo die beyden gegebenen Linien an einander geſetzt worden ſind, eine ſenkrechte Linie, und verlängere dieſelbe bis an die Peripherie, ſo muß dieſe Linie BN die mittlere Proportionallinie zu den beyden gegebenen Linien PA und MC ſeyn; d. h. es muß ſich verhalten

$$PA : BN = BN : MC$$

Beweis.

Man ziehe die Linien BC und BG, ſo iſt der Winkel CBG ein rechter Winkel. (§. 84.) Da nun, weil BN auf CG ſenkrecht gezogen worden, r ebenfalls ein rechter Winkel iſt, ſo folgt, daß

$\prec$ CBG = r
C = C (§. 9. Arithm.)

o = G (§. 71.)
r = n vermöge der Construction

$\triangle$ CBN $\sim$ $\triangle$ BNG (§. 145.)

d. i. CN : BN = BN : NG

oder weil CN = PA und NG = MC vermöge der Construction

PA : BN = BN : MC

§. 153.

Der Triangel CBG, wie vorhin erwiesen wurde, ist ein rechtwinklichter Triangel, CG die Hypothenuse, und BN senkrecht auf derselben; weil sich nun verhält

CN : BN = BN : NG

so ist klar, daß die senkrechte Linie, welche man aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse ziehen kann, die mittlere Proportional-Linie zwischen den beyden Theilen der Hypothenuse ist, die durch diese senkrechte Linie abgeschnitten werden.

§. 154.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in so viel gleiche Theile zu theilen, als verlangt wird.

Auflösung.

Es sey (Fig. 77. Tab. 6.) die gegebene Linie PN in drey gleiche Theile zu theilen. Man trage auf eine Linie von unbestimmter Länge, wie z. E. BR, so viel gleiche willkührliche Theile, als die gegebene Linie enthalten soll, also in dem gegenwärtigen Falle drey

drey gleiche Stücke, und mache dahero BM = MQ = QC. Ueber der Linie BC, welche aus den drey gleichen Stücken bestehet, beschreibe man den gleichseitigen Triangel ABC, trage auf die Schenkel AB und AC die gegebene Linie PN, so daß AF = AG = PN, ziehe die Linie FG und verbinde die Spitze des Triangels A mit den Puncten M und Q durch gerade Linien, so muß die Linie FG der gegebenen Linie PN gleich und FS der dritte Theil von FG oder PN seyn.

Beweis.

Weil AB = AC und AF = AG vermöge der Construction, so verhält sich

AB : AC = AF : AG :

FG parallel mit BC (§. 144.)

AB : BC = AF : FG (§. 146.)

AB = BC vermöge der Construction

AF = FG

AF = PN vermöge der Constr.

FG = PN (§. 11. Ar.)

Nun ist FS parallel mit BM, weil FG parallel mit BC, folglich

AF : FS = AB : BM (§. 146.)

AF = FG und AB = BC

FG : FS = BC : BM (§. 9. Ar.)

BC : BM = 3 : 1 vermöge der Constr.

FG : FS = 3 : 1 (§. 11. Ar.)

§. 155.

§. 155.

Auf eben die Art läßt sich auch eine gegebene Linie z. E. FR (Fig. 78.) nach eben der Proportion theilen, nach welcher eine andere gegebene Linie z. E. NQ eingetheilt ist. Denn man beschreibe über die Linie NQ einen gleichseitigen Triangel, und trage auf die Seiten CN und CQ die gegebene Linie FR, so daß CP = CS = FR, ziehe die Linien PS, CF und CG, so muß PS = FR, und nach eben dem Verhältnis, wie NQ getheilt seyn.

§. 156.

Lehrsatz. Wenn von einem Puncte ausserhalb der Peripherie eines Cirkels zwey gerade Linien in den Cirkel gezogen werden, so verhalten sich diese Linien umgewendet wie ihre Theile, die sich ausser dem Cirkel zwischen dem Puncte und der Peripherie befinden.

Es sey (Fig. 108. Tab. 12.) von dem Puncte A sowohl die gerade Linie AN als auch AQ in den Cirkel CPQN gezogen, so verhält sich

AN : AQ = AP : AC

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien CP und NQ, so entstehen die Triangel ACP und ANQ, deren Aehnlichkeit sich folgendergestalt zeigen läßt. Der Winkel CPQ ist ein Winkel an der Peripherie, und hat daher zu seinem Maaße den halben Bogen CNQ. (§. 83.) Der Winkel bey N ist ebenfalls ein Winkel an der Peripherie, und daher der halbe Bogen CPQ sein Maaß. Da nun beyde Bogen die

die ganze Peripherie oder 360° ausmachen, so ist klar, daß die Summe dieser beyden Winkel 180 Grad beträgt. Ist also

$$\angle CPQ + \angle N = 180°$$

und $\angle CPQ + \angle CPA = 180°$ (§. 55.)

$$\angle CPQ + \angle N = \angle CPQ + \angle CPA \text{ (§. 11. Ar.)}$$

$$\angle N = \angle CPA \text{ (§. 14. Ar.)}$$

$$\angle A = \angle A$$

$$\triangle ANQ \sim \triangle ACP$$

und $AN : AQ = AP : AC$ (§. 145.)

§. 157.

Lehrsatz. Sind zwey Figuren einander ähnlich, so verhalten sich ihre Perimeter, wie diejenigen einzelnen Seiten in beyden Figuren, die an einerley Winkel liegen.

Es sey (Fig. 85. Tab. 9.) die Figur dfabc der Figur DFABC ähnlich, d. h.

$$\angle fab = \angle FAB$$
$$\angle b = \angle B$$
$$\angle bcd = \angle BCD \text{ &c.}$$
$$\text{und } fa : ab = FA : AB$$
$$\text{oder altern. } fa : FA = ab : AB \text{ &c.}$$

so muß sich verhalten

$$fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF =$$
$$df : DF$$
$$\text{oder} = fa : FA$$
$$\text{oder} = ab : AB$$
$$\text{oder} = bc : BC$$
$$\text{oder} = cd : CD$$

Beweis.

Beweis.

Vermöge der angenommenen Bedingung verhält sich

fa : ab = FA : AB (§. 141.)

fa + ab : ab = FA + AB : AB (§. 105. Ar.)

fa + ab : FA + AB = ab : AB (§. 100. Arithm.)
ab : AB = bc : BC vermöge der Bedingung.

fa + ab : FA + AB = bc : BC (§. 11. Ar.)

fa + ab : bc = FA + AB : BC (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc : bc = FA + AB + BC : BC (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc : FA + AB + BC = bc : BC (§. 100. Ar.)
bc : BC = cd : CD vermöge der Aehnlichk. der Figur.

fa + ab + bc : FA + AB + BC = cd : CD (§. 11. Ar.)

fa + ab + bc : cd = FA + AB + BC : CD (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc + cd : cd = FA + AB + BC + CD : CD (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc + cd : FA + AB + BC + CD = cd : CD (§. 100. Ar.)
cd : CD = df : DF wegen der Aehnl. der Fig.

fa + ab + bc + cd : FA + AB + BC + CD = df : DF (§. 11. Ar.)

fa + ab + bc + cd : df = FA + AB + BC + CD : DF (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc + cd + df : df = FA + AB + BC + CD + DF : DF (§. 105. Ar.)

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD + DF = df : DF (§. 100. Ar.)

Da sich nun, vermöge der Aehnlichkeit beyder Figuren, die Seiten df und DF eben so verhalten, wie die Seiten fa und FA, und diese wie ab und AB u.

f. f. so ist klar, daß man statt des Verhältnisses df : DF auch das Verhältniß fa : FA oder ab : AB u. s. f. setzen kann.

§. 158.

Man ziehe in den beyden ähnlichen Figuren (Fig. 85.) Diagonal-Linien aus gleichen Winkeln, z. E. fc und FC oder ac und AC, so muß der Triangel fdc dem Triangel FDC; der Triangel fac dem Triangel FAC, und der Triangel abc dem Triangel ABC ähnlich seyn. Denn da die beyden Figuren ähnlich sind, und folglich gleiche Winkel und proportionirliche Seiten haben, so ist

d = D

fd : dc = FD : DC

$$\left.\begin{array}{rl} \triangle\ \text{fdc} & \sim\ \triangle\ \text{FDC} \\ \text{und } \sphericalangle\ \text{dfc} & =\ \sphericalangle\ \text{DFS} \end{array}\right] \text{(§. 147.)}$$

Auf eben die Art ist klar, weil

b = B

ab : bc = AB : BC

$$\left.\begin{array}{rl} \text{daß } \triangle\ \text{abc} & \sim\ \triangle\ \text{ABC} \\ \sphericalangle\ \text{cab} & =\ \sphericalangle\ \text{CAB} \end{array}\right] \text{(§. 147.)}$$

Weil nun vermöge der Bedingung des Satzes

$\sphericalangle$ dfa = $\sphericalangle$ DFA

$\sphericalangle$ dfc = $\sphericalangle$ DFC wie jetzt erwiesen wurde

$\sphericalangle$ dfa — $\sphericalangle$ dfc = $\sphericalangle$ DFA — $\sphericalangle$ DFC (§. 14. Ar.)

d. i. $\sphericalangle$ cfa = $\sphericalangle$ CFA

Weil ferner wegen Aehnlichkeit der Figuren

$\sphericalangle$ fab = $\sphericalangle$ FAB

und $\sphericalangle$ cab = $\sphericalangle$ CAB wie schon erwiesen worden

$\sphericalangle$ fab — $\sphericalangle$ cab = $\sphericalangle$ FAB — $\sphericalangle$ CAB (§. 14. Ar.)

d. i. $\sphericalangle$ fac = $\sphericalangle$ FAC

$\triangle$ fca $\sim$ $\triangle$ FCA (§. 145.)

§. 159.

§. 159.

Es verhalten sich daher die Perimeter ähnlicher Figuren auch wie alle Diagonal-Linien, die aus einerley Winkeln gezogen werden. So muß sich z. E. in den vorigen beyden Figuren verhalten

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD +
DF = fc : FC
oder = ac : AC

Denn weil △ dfc ∽ △ DFC (§. 158.)

df : fc = DF : FC (§. 141.)

df : DF = fc : FC (§. 100. Ar.)

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD +
DF = df : DF (§. 157.)

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD +
DF = fc : FC (§. 11. Ar.)

fc : FC = ac : AC, weil △ fca ∽ △ FCA (§. 158.)

fa + ab + bc + cd + df : FA + AB + BC + CD +
DF = ac : AC (§. 11. Ar.)

§. 160.

Da man sich die Cirkel als geradelinichte Figuren, von unendlich viel Seiten vorstellen kann, und alle Cirkel einander ähnlich sind, (§. 142.) so müssen sich die Peripherien der Cirkel wie ihre Diameter verhalten, weil man die Diameter als Diagonal-linien, die aus einerley Winkeln gezogen werden, betrachten kann.

§. 161.

Wir wollen daher zwey Cirkel mit einander vergleichen. Der erste Cirkel heisse c, sein Diame-

ter d, und seine Peripherie p; der andere C, sein Diameter D, und die Peripherie P; so ist, weil man den Inhalt eines Cirkels findet, wenn man den vierten Theil des Diameters in die Peripherie multiplicirt

$$\left.\begin{array}{l} c = \frac{1}{4}\,dp \\ C - \frac{1}{4}\,DP \end{array}\right) \quad (\S.138.)$$

$$c : C = \tfrac{1}{4}\,dp : \tfrac{1}{4}\,DP$$

$$c : C = dp : DP \quad (\S.101.\ Ar.)$$

$$\text{oder } c : C = \overline{d : D} + \overline{p : P} \quad (\S.110.\ Ar.)$$

$$p : P = d : D \quad (\S.160.)$$

$$c : C = \overline{d : D} + \overline{d : D} \quad (\S.9.\ Ar.)$$

$$\text{oder } c : C = d \times d : D \times D \quad (\S.110.\ Ar.)$$

d. h. die Cirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Diameter. Ist also der Diameter eines Cirkels zweymal so groß, als der Diameter eines andern Cirkels, so ist der erste Cirkel selbst viermal grösser, als der andere. Wäre der Diameter eines Cirkels dreymal so groß, als der Diameter eines andern, so würde der erste Cirkel selbst 9 mal grösser seyn, als der andere u. s. f.

§. 162.

Weil der Radius die Hälfte eines Diameters ist, und das Verhältnis der Hälften und der Ganzen einerley seyn muß, (§. 103. Ar.) so ist klar, daß sich auch die Peripherien der Cirkel, wie die Halbmesser derselben, und die Cirkelflächen selbst wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten müssen.

Fünf-

Fünftes Capitel.

Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde.

§. 163.

Damit Anfänger doch einigermaßen den Nutzen einsehen mögen, welchen die bisher erklärten geometrischen Sätze auch im gemeinen Leben haben, so soll jetzt kürzlich gezeigt werden, wie man durch Hülfe derselben Weiten, Höhen und Flächen auf dem Felde messen könne. Da aber der enge Raum dieser Blätter keine ausführliche Abhandlung über diese Materie erlaubet, so können wir uns hier in keine genaue Beschreibung der Instrumente, die zu der Ausübung der Geometrie nöthig sind, einlassen, zumal da hierzu viele Zeichnungen nöthig seyn würden, und Anfänger über dieses bey einem Mechanico viel deutlichere Begriffe, als bey einem Schriftsteller, von diesen Dingen erlangen können. Ausführlichen und deutlichen Unterricht von der Anwendung der Geometrie auf das Feldmessen findet man unter andern in der **Gründlichen Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde**, welche Hr. Pr. Böhm zu Giessen 1759 in 4. herausgegeben hat.

§. 164.

Jede Ausmessung einer Weite und Höhe, die sich nicht unmittelbar messen läßt, wird dadurch bewerkstelliget, daß man sich die gerade Linie, wodurch die Entfernung oder Höhe eines Orts bestimmt wird, als die Seite eines Triangels vorstellt, und von diesem Triangel so viel zu finden sucht, als hinlänglich

ist, einen gleichen oder ähnlichen Triangel zu machen; daher man die folgenden Aufgaben leicht verstehen wird, wenn man die Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Triangel wohl verstanden hat.

§. 165.

Die Puncte pflegt man sich auf dem Felde durch Stäbe vorzustellen, die man senkrecht in die Erde steckt, wofern nicht schon an dem Orte, wo das Ende einer Linie seyn soll, ein Baum oder anderes Merkmal sich befindet; Die geraden Linien, welche nicht allzulang sind, bestimmt man durch zwey Stäbe, die man an ihre Endpuncte setzet. Bey langen Linien aber pflegt man auch in der Mitten noch einige Stäbe einzustecken. Man kann aber leicht sehen, ob ein mittler Stab mit den beyden äussersten, welche die Endpuncte vorstellen, in gerader Linie stehet, wenn man mit einem Auge von dem einem äussersten Stabe gegen den andern zu siehet, und Achtung giebt, ob alle mittlere Stäbe dadurch verdeckt werden.

§. 166.

Zu der unmittelbaren Messung der Linien auf dem Felde bedient man sich entweder einer Kette, Stange, oder Schnur, welche in Ruthen und Schuh eingetheilt sind. Bey den Schnuren ist nur dieses zu merken, daß sie von der Feuchtigkeit der Luft viel kürzer, und von der Trockenheit derselben viel länger werden, wofern sie nicht zuvor in Leinöl gesotten, und durch und durch mit Wachs getränkt worden sind.

§. 167.

Durch Hülfe einer blossen Schnur oder Kette läßt sich leicht ein Winkel auf dem Felde an jeden Punct

einer

einer gegebenen Linie tragen, wenn man nur dasjenige auf dem Felde verrichtet, was §. 46. auf dem Pappiere gezeigt worden ist. Denn es sey (Fig. 34. Tab. 3.) A ein Winkel auf dem Felde, und C ein gegebener Punct einer geraden Linie, an welchen der Winkel A gesetzt werden soll. Man erwähle sich auf den Schenkeln des Winkels A zwey beliebige Puncte, z. E. N und G. Messe erstlich die Linie AG und mache CD = AG. Hierauf messe man auch AN und NG, und mache sich eine Schnur, die so groß ist, als beyde Linien zusammengenommen, doch so, daß man sich den Punct N, welcher der Endpunct von AN ist, durch ein Merkmal an der Schnur bezeichnet. Die beyden Ende dieser Schnur stecke man an die Puncte C und D, dehne sie alsdenn an dem Puncte N aus, und stecke an den Ort B, wo dieser Punct hintrift, einen Stab, so muß der Winkel C, welchen die Linien BC und DC mit einander machen, dem Winkel A vollkommen gleich seyn. Denn vermöge der Operation ist in den beyden Triangeln CBD und ANG

CD	=	AG
CB	=	AN
BD	=	NG
C	=	A (§. 41.)

§. 168.

Wenn man auf dem Pappiere Figuren im kleinen entwerfen will, die gewissen grössern Figuren auf dem Felde ähnlich seyn sollen, welches man ein Feld aufnehmen oder in Grund legen heißt, so braucht man hierzu einen Maasstab, durch welchen sich die gewöhnlichen Längen-Maaße im kleinen vor-

stellen lassen. Ein solcher Maasstab wird daher auch ein verjüngter Maasstab genannt, weil man in der ausübenden Geometrie durch das Wort verjüngen nichts anders versteht, als eine kleine Linie oder Figur einer grössern Linie oder Figur ähnlich zu machen. Die Construction aber eines solchen Maasstabes ist folgende, wenn er Ruthen, Schuh u. s. f. nach der geometrischen Eintheilung vorstellen soll. Man trage (Fig. 76. Tab. 6.) auf eine unbestimmte Linie zehen willkührlich angenommene Theile, so daß die daraus entstehende Linie AB zehn solche gleiche Linien wie NB enthält. Die Linie AB selbst trage man ferner so oft auf die Linie AC, als es die Länge derselben erlaubet. An die Endpuncte A, B und C errichte man senkrechte Linien von unbestimmter Länge, und trage auf die eine derselben, z. E. auf PA oder SB ebenfalls zehn willkührlich angenommene gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte a, b, c, d &c. gerade Linien parallel mit AC. Auf die oberste dieser Linien PQ trage man ferner die Theile der untersten Linien AC, so das S1 = NB u. s. f. gemacht wird. Endlich ziehe man noch die Linien SN u. s. f. wie man aus der Figur ersehen kann, so ist der verjüngte Maasstab fertig. Läßt man nun die Linie AB eine Ruthe bedeuten, so wird NB oder S1 einen Schuh, qa einen Zoll, rb zwey Zoll, gc drey Zoll, nd vier Zoll, fe fünf Zoll u. s. f. vorstellen. Denn weil vermöge der Construction qa parallel mit NB ist, so verhält sich

Sa : qa = SB : NB (§. 146.)

Sa : SB = qa : NB (§. 100. Ar.)
Sa : SB = 1 : 10 vermöge der Constr.

qa : NB = 1 : 10 (§. 11. Ar.)

Auf

Auf eben die Art ist auch klar, daß rb 2 Zoll vorstellt, wenn NB 1 Schuh, d. i. 10 Zoll bedeutet, oder, welches eben so viel sagen will, daß sich verhält

rb : NB = 2 : 10.

Denn weil auch rb mit NB parallel gezogen worden, so ist der Triangel Srb dem Triangel SNB ähnlich, (§. 146.) und daher

Sb : rb = SB : NB

Sb : SB = rb : NB (§. 100. Ar.)
Sb : SB = 2 : 10 vermöge der Constr.

rb : NB = 2 : 10 (§. 11. Ar.)

Wollte man den verjüngten Maasstab nach einer andern Eintheilung der Ruthen, Schuhe u. s. f. einrichten, z. E. nach dem sogenannten Duodecimalmaasse, nach welchem die Ruthe in 12 Schuhe, der Schuh in 12 Zoll u. s. f. getheilt wird, so müßte man auf die Linien AB und AP nicht 10, sondern 12 gleiche Theile tragen, wie ein jeder leicht von selbst einsehen wird.

§. 169.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu denen beiden man aus einem gewissen Orte in gerader Linie gehen kann.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 80. Tab. 7.) die Entfernung der beyden Oerter B und G und folglich die gerade Linie BG zu messen, die sich wegen des darzwischen liegenden Teichs nicht unmittelbar messen läßt, zu deren beyden Endpuncten B und G aber man aus dem angenommenen Orte C in gerader Linie kommen kann. Man stecke erstlich in den angenommenen Ort C ei-

nen Stab, messe alsdenn die Linie CB und trage sie zurück gegen Q in eben der Richtung, so daß nicht nur CQ = CB, sondern daß auch CQ und CB in einer geraden Linie liegen, und bemerke den Punct Q durch einen Stab. Auf eben diese Art messe man auch CG und trage diese Linie gegen A zurück, so daß CA = CG und beyde Linien nach einerley Richtung liegen. Wird nun in A auch ein Stab gesteckt, und die Entfernung dieses Stabes von dem Stabe Q gemessen, so weiß man die Entfernung BG, weil AQ so groß als BG seyn muß.

Beweis.

In den Triangeln BCG und CAQ, welche man sich hier gedenken kann, ist

CQ	=	CB	) vermöge der Construction
CA	=	CG	)
u	=	o	(§. 58.)
AQ	=	BG	(§. 37.)

Oft erlaubet es der Platz nicht, daß man die ganzen Linien CB und CG zurück tragen kann; in diesem Falle braucht man nur einen Theil dieser Linien, z. E. die Hälfte zu nehmen. Ist nun also CN die Hälfte von CB, und CF die Hälfte von CG, so ist auch die Linie FN nur die Hälfte von der zu messenden Weite BG. Mißt man also FN, und nimmt diese Linie zweymal, so weiß man BG. Der Grund davon ist folgender. Weil

CN : CB	=	I : 2	) vermöge der Construction
CF : CG	=	I : 2	)
CN : CB	=	CF : CG	(§. 11. Ar.)
CN : CF	=	CB : CG	(§. 100. Ar.)
u	=	o	(§. 58.)

△ CFN

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\triangle CFN}{CF : FN} \;\sim\; \frac{\triangle GBG}{CG : BG} \\ \hline CF : CG = FN : BG \\ CF : CG = 1 : 2 \\ \hline FN : BG = 1 : 2 \end{array}\right.$$

(§. 147.)
(§. 100. Ar.)
(§. 11. Ar.)

Wäre CF der dritte Theil von CG, und CN der dritte Theil von CB, so würde auch FN nur der dritte Theil von BG seyn, wie man aus dem vorigen Beweise leicht einsehen wird.

Andre Auflösung.

Hat man ausser einer Meßkette und einigen Stäben, welche zur vorigen Auflösung nur nöthig sind, auch einen Winkelmesser oder ein Meßtischchen, welches nichts anders ist, als ein Reißbret, auf einem beweglichen Fusse, so läßt sich die vorige Aufgabe noch bequemer auflösen. Nemlich man messe mit dem Winkelmesser den Winkel o, und mit der Meßkette die Linien CB und CG auf dem Felde. Alsdenn trage man durch Hülfe des Transporteurs den Winkel o auf das Pappier, und mache c = o. Auf die Schenkel des Winkels c trage man durch Hülfe des verjüngten Maasstabes die Linien CB und CG, so daß cb und cg eben so viel Theile nach dem verjüngten Maasstabe enthalten, als CB und CG nach dem eigentlichen Maasse haben. Wird nun auf dem Pappiere die Linie bg gezogen, und nach dem verjüngten Maasstabe gemessen, so muß dieselbe eben so viel verjüngte Ruthen und Schuhe enthalten, als die zu messende Weite BG wirkliche Ruthen und Schuhe enthält. Denn weil bc und cg nach dem

ver-

verjüngten Maasse eben so viel Theile haben, als CB und CG nach dem wirklichen Maasse, so verhält sich

cb : cg = CB : CG
c = o vermöge der Construction

Δ cbg $\sim$ Δ CBG
cb : bg = CB : BG) (§. 147.)

cb : CB = bg : BG (§. 100. Arithm.)

Vermöge der Construction aber verhält sich cb zu CB so, daß cb nach dem verjüngten Maasse eben so viel Theile hat, als CB nach dem grossen Maasse. Folglich muß auch bg nach dem verjüngten Maasstabe so viel Ruthen enthalten, als BG nach dem eigentlichen Maasse.

Mit dem Meßtischchen kann man diese Aufgabe noch geschwinder auflösen, und dabey den Transporteur entbehren. Denn man setze das Tischchen über den Punct C, richte das Dioptern-Linial erstlich nach dem Orte B, und alsdenn nach dem Orte G, und ziehe jedesmal eine gerade Linie, so erhält man auf dem Tischchen einen Winkel, welcher so groß ist, als der Winkel o auf dem Felde, weil er ihn decket. Trägt man nun, wie vorhin, auf die Schenkel dieses Winkels, nach dem verjüngten Maasstabe die gemessenen Linien CB und CG, so erhält man auf dem Tischchen einen Triangel, wie cbg, welcher dem Triangel CBG auf dem Felde ähnlich ist. Die Seite, welche dem Winkel o gegenüber steht, muß also, wie aus vorigem Beweise erhellt, die verlangte Weite vorstellen.

§. 170.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Orte

zu messen, zu deren einem man nur in gerader Linie kommen kann.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 81. Tab. 7.) die Entfernung der beyden Häuser A und B, zwischen welchen sich ein Fluß befindet, zu messen, und es sey nur möglich, an das Haus A in gerader Linie zu gehen.

Muß man diese Messung mit blossen Stäben und einer Meßkette verrichten, so erwähle man sich einen Punct, z. E. N, von welchem sich gegen A eine gerade Linie unmittelbar messen läßt, und bezeichne denselben durch einen Stab. Hat man diese Linie NA gemessen, so trage man dieselbe nach eben der Richtung zurück, so daß NR = NA, und beyde eine einzige gerade Linie AR ausmachen. Den Winkel A trage man durch Hülfe der Meßkette oder einer Schnur an den Punct R, aber nach entgegengesetzter Richtung, so daß $< R = < A$. (§. 167.) In dem Schenkel dieses Winkels QR gehe man alsdenn mit einem Stabe so lange fort, bis man denselben mit N und B in einer geraden Linie erblicket. Ist nun der Stab Q mit N und B in eine gerade Linie gesetzt worden, so darf man nur die Linie QR messen, um die verlangte Weite AB zu wissen, weil QR = AB

Beweis.

NR	=	NA	) vermöge der Constr.
$< R$	=	$< A$	)
y	=	x	(§. 58.)
QR	=	AB	(§. 39.)

Man kann auch hier dasjenige beobachten, was bey der vorigen Aufgabe erinnert worden ist, daß man nemlich nicht allemal die ganze Linie NA zurücktragen

gen darf. Nur dieses muß man nicht vergessen, daß alsdenn, wenn man nur einen Theil von NA nimmt, kein gleicher, sondern nur ein ähnlicher Triangel entstehet. QR ist in diesem Falle ein eben so grosser Theil von AB, als es NR von NA ist. Wäre also z. E. NR nur der zehnte Theil von NA, so würde auch QR nur der zehnte Theil von der verlangten Weite AB seyn.

Andere Auflösung.

Man messe mit einem Winkelmesser die Winkel x und A, und mit der Meßkette die linie NA; Hierauf trage man auf das Papier eine linie na, die nach dem verjüngten Maasstabe so viel Theile enthält, als NA nach dem eigentlichen Maasse. An die Endpuncte dieser linie trage man durch Hülfe des Transporteurs die beyden Winkel x und a, so daß $n = x$ und $a = A$ gemacht wird. Die Schenkel der Winkel n und a verlängere man, bis sie einander durchschneiden, so muß der Triangel anb auf dem Papiere dem Triangel ANB auf dem Felde ähnlich seyn. Mißt man nun die Seite ab nach dem verjüngten Maasstabe, so erfährt man, wie viel Ruthen, Schuh, u. s. f. die gesuchte Weite AB enthält.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{rcl} n & = & x \\ a & = & A \end{array}\right) \text{ vermöge der Construction.}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \triangle\ anb & \sim & \triangle\ ANB \\ an : ab & = & AN : AB \end{array}\right) \quad (\S.\ 145.)$$

$$an : AN = ab : AB \quad (\S.\ 100.\ \text{Ar.})$$

Da sich nun an zu AN vermöge der Construction so verhält, daß an nach dem verjüngten Maasstabe so groß

groß ist, als AN nach dem grossen Maasse, so ist klar, daß auch ab so viel verjüngte Ruthen und Schuhe enthalten muß, als AB ordentliche Ruthen und Schuhe enthält.

Eben diesen ähnlichen Triangel anb bekömmt man auch durch das Meßtischchen, wenn man dasselbe erstlich über den Punct N setzt, und den Winkel x aufnimmt; den Schenkel dieses Winkels, welcher über NA stehet, nach dem verjüngten Maasstabe so groß macht, als NA nach dem eigentlichen Maasse ist; alsdenn das Tischchen in die Gegend A trägt, und dasselbe so stellt, daß der Punct a über A, und an über AN stehet. Wird nun das Dioptern-Linial nach B gerichtet, und eine gerade Linie auf dem Tischchen gezogen, so muß der Winkel a auf dem Tischchen dem Winkel A auf dem Felde gleich, und überhaupt der Triangel anb auf dem Tischchen dem Triangel ANB auf dem Felde nach dem vorigen Beweise ähnlich seyn.

§. 171.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, zu deren keinem man von dem Orte, wo man sich befindet, in gerader Linie gehen kann.

Auflösung.

Es sey (Fig. 82. Tab. 8.) die Entfernung zweyer Bäume C und B jenseit eines Flusses zu bestimmen. Man erwähle sich zwey Standpuncte A und G, deren Entfernung sich unmittelbar messen läßt, und aus denen beyden man sowohl den Baum C als auch den Baum B und den andern Standort sehen kann. Beyde Standörter bezeichne man durch

Stä-

Stäbe, und stelle sich zwischen denselben und den beyden Oertern C und B die geraden Linien AG, AB, AC, GC, GB vor. Nun messe man mit dem Winkelmesser sowohl die Winkel o und x, als auch die Winkel e und u, ingleichen mit der Meßkette die Entfernung der beyden angenommenen Standpuncte A und G. Durch Hülfe des verjüngten Maasstabes trage man die Linie AG auf das Papier, so daß ag so viel verjüngte Ruthen enthält, als AG ordentliche Ruthen. An den Punct a setze man durch Hülfe des Transporteurs die Winkel o und x, an den Punct g aber die Winkel e und u. Die Schenkel ac und gc, ferner die Schenkel ab und gb verlängere man so weit, bis sie einander durchschneiden, so müssen die beyden Durchschnittspuncte c und b nach dem verjüngten Maasstabe eben die Entfernung haben, als die beyden Bäume C und B nach dem grossen Maasse.

Beweis.

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{cag} = \sphericalangle \text{CAG} \\ \sphericalangle \text{cga} = \sphericalangle \text{CGA} \end{array}\right\}$ vermöge der Constr.

ag : ac = AG : AC (§. 145.)

ag : AG = ac : AC (§. 100. Ar.)

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{bag} = \sphericalangle \text{BAG} \\ \sphericalangle \text{bga} = \sphericalangle \text{BGA} \end{array}\right\}$ vermöge der Constr.

ag : ab = AG : AB (§. 145.)

ag : AG = ab : AB (§. 100. Ar.)

ag : AG = ac : AC nach dem vorigen Beweise.

ab : AB = ac : AC (§. 11. Ar.)

ab : ac = AB : AC (§. 100. Ar.)

$\sphericalangle$ cab = $\sphericalangle$ CAB vermöge der Construction

$\triangle$ cab $\sim$ $\triangle$ CAB (§. 147.)

d. i.

d. i. $\frac{ac : cb = AC : CB}{ac : AC = cb : CB}$ (§. 100. Ar.)
$\frac{ag : AG = ac : AC}{ag : AG = cb : CB}$ wie oben erwiesen wurde

Da nun ag nach dem verjüngten Maasstabe so groß gemacht worden ist, als AG nach dem wahren Maasse, so muß auch, vermöge der Proportion cb nach dem verjüngten Maasstabe so viel Ruthen enthalten, als die Linie CB auf dem Felde nach dem eigentlichen Maasse enthält.

Wer das vorige verstanden hat, der wird leicht einsehen, wie man die gegenwärtige Aufgabe auch durch Hülfe des Meßtischchens auflösen könne.

Hätte man weder Winkelmesser noch Meßtischchen, so müßte man sich die Figur cbga an einem bequemen Orte auf dem Felde entwerfen, indem man die Winkel o, x, e und u durch Hülfe einer Schnur oder Kette abtrüge. (§. 167.) Machte man nun ag = AG, so würde auch cb = CB seyn. Wäre ag nur ein Theil, z. E. die Hälfte von AG, so würde auch cb nun die Hälfte von CB seyn, wie aus dem vorigen Beweise erhellt.

§. 172.

Aufgabe. Eine Höhe zu messen, zu der man in gerader Linie kommen kann, und mit welcher man sich auf einerley Ebene befindet.

Erste Auflösung.

Es sey (Fig. 84. Tab. 9.) die Höhe AM, d. h. die senkrechte Linie zu finden, die sich von der Spitze A auf den Boden ziehen läßt. Man erwähle sich einen bequemen Standort, z. E. C, aus welchem

ſich eine gerade Linie gegen den Fuß der Höhe meſſen läßt. Zwiſchen dieſem Puncte C und den Endpuncten der Höhe A und M ſtelle man ſich die Linien CA und CM vor, meſſe den Winkel, welchen dieſe beyden Linien mit einander machen, mit dem Winkelmeſſer, und die Linie CM mit der Meßkette. Hierauf ziehe man auf dem Papiere eine Linie mc, welche nach dem verjüngten Maasſtabe ſo groß iſt, als CM nach dem wahren Maaße; trage den Winkel C durch Hülfe des Transporteurs an den Punct c, errichte in m eine ſenkrechte Linie, und verlängere dieſelbe, bis ſie den andern Schenkel des Winkels c ſchneidet, alsdenn meſſe man dieſe Linie am nach dem verjüngten Maasſtabe, ſo ſieht man daraus, wie groß die Höhe AM nach dem eigentlichen Maaße iſt.

Beweis.

Weil ſowohl der Winkel m, als auch der Winkel M ein rechter Winkel, und c = C vermöge der Conſtruction iſt, ſo müſſen die beyden Triangel amc und AMC einander ähnlich ſeyn, und folglich

$$\frac{mc : am = MC : AM \quad (\S.\ 145.)}{mc : MC = am : AM \quad (\S.\ 100.\ Ar.)}$$

Da nun, vermöge der Conſtruction mc nach dem verjüngten Maaße ſo viel Theile hat, als MC nach dem groſſen Maaße; ſo muß auch am nach dem verjüngten Maasſtabe ſo groß ſeyn, als AM nach dem ordentlichen Maaße.

Weil man die Inſtrumente, womit man die Winkel mißt, nicht unmittelbar auf die Erde leget, ſondern auf ein Stativ ſetzet, ſo muß man allemal zu der gefundenen Höhe noch die Höhe des Stativs addiren.

Ande-

Andere Auflösung.

Ohne Winkelmesser läßt sich diese Aufgabe auch durch blosse Stäbe folgendergestalt auflösen. Man stecke einen Stab BG senkrecht in die Erde. Hinter diesen Stab lege man sich auf den Rücken, und bewege sich so lange hin und her, bis man die Spitze des Stabes b mit der Spitze der zu messenden Höhe A in einer geraden Linie erblicket. Den Punct C, wo sich das Auge befunden, mit welchem man gegen die Spitzen B und A in gerader Linie gesehen, bemerke man mit einem Stabe, messe die Entfernung des Auges von dem Stabe, die Länge des Stabes und die Entfernung des Auges von der Höhe; nunmehr schliesse man: wie sich verhält die Entfernung des Stabes von dem Auge zu der Länge des Stabes, so verhält sich auch die Entfernung des Auges von der Höhe zu der Höhe selbst, z. E. es sey die Entfernung des Stabes von dem Auge, nemlich CG = 12′ die Höhe BG = 8′, die Entfernung des Auges von der Höhe CM = 240′, so findet man die Höhe AM durch Hülfe der Regel Detri folgendergestalt:

CG : BG = CM : AM
d. i. 12′ : 8′ = 240′ : AM

12) 1 — 20 — 8

160′ = AM

Beweis.

Weil bey M und bey G rechte Winkel sind, indem der Stab BG senkrecht in die Erde gesteckt wird, und der Winkel C den beyden Triangeln BGC und AMC gemein ist, so müssen diese Triangel einander ähnlich seyn. Es verhält sich daher

GC : BG = CM : AM (§. 145.)

Dritte Auflösung.

Aus der Länge des Schattens eines Körpers läßt sich ebenfalls seine Höhe bestimmen, wenn man zugleich die Länge des Schattens mißt, den ein senkrecht eingesteckter Stab zu eben der Zeit von sich wirft, und dieselbe mit der Länge des Stabes vergleichet. Z. E. es sey der senkrechte Stab am = 8′, die Länge seines Schattens mc = 10′, und die Länge von dem Schatten des Thurmes MC = 200′, so schliesse man, wie sich verhält der Schatten des Stabes zu der Länge des Stabes, so verhält sich der Schatten des Thurms zu der Höhe des Thurms

mc : am = MC : AM
d. i. 10′ : 8′ = 200′ : AM

8
10) 1600 (160′ = AM

Der Beweis ist mit dem vorigen völlig einerley. Denn die Winkel C und c sind einander gleich, wenn man die Grenzen der beyden Schatten in einem Augenblicke bemerket, und die Winkel bey m und M rechte Winkel, folglich △ amc ∽ △ AMC, (§. 145.) und daher

mc : am = MC : AM

§. 173.

Aufgabe. Eine Höhe zu messen, mit welcher man sich auf einer Ebene befindet, zu der man aber nicht in gerader Linie gehen kann.

Auflösung.

Es sey (Fig. 83. Tab. 8.) die Höhe eines Thurms PN zu messen, an welchen man wegen eines

darum

darum gehenden Grabens nicht kommen kann. Man erwähle sich zwey Standörter A und B, deren Entfernung sich unmittelbar messen läßt, und stelle sich von denselben gerade Linien gegen die Spitze P vor. Hierauf messe man mit dem Winkelmesser die Winkel x und B, welche durch diese Linien entstehen, und mit der Meßkette die Entfernung der Standörter AB. Ferner trage man auf das Papier eine Linie ab, die nach dem verjüngten Maasstabe so groß ist, als AB nach dem ordentlichen Maaße. An die Endpuncte dieser Linie a und b setze man die Winkel x und B, so daß $< pan = < x$ und $b = B$. Die Schenkel dieser Winkel verlängere man, bis sie zusammenstossen, und aus dem Puncte p, wo sie zusammenkommen, ziehe man auf die verlängerte Linie ab die senkrechte Linie pn, so muß dieselbe nach dem verjüngten Maaße eben so groß seyn, als die zu messende Höhe PN nach dem wahren Maaße ist.

Beweis.

Weil vermöge der Construction in dem Triangel pab zwey Winkel von eben der Grösse sind, als in dem Triangel PAB, so müssen die beyden Triangel einander ähnlich seyn, und

$$\frac{ab : ap = AB : AP \quad (\S.\ 145.)}{ab : AB = ap : AP \quad (\S.\ 100.\ Ar.)}$$

Aus eben dem Grunde ist auch der Triangel pna dem Triangel PNA ähnlich, denn pn ist senkrecht auf nb gezogen worden, und PN stellt die Höhe des Thurms vor, und ist daher senkrecht auf NB, woraus die Gleichheit der Winkel pna und PNA erhellt. Da nun überdieses auch der Winkel pna so groß gemacht worden ist, als der Winkel x, so verhält sich

ap : pn	=	AP : PN	(§. 145.)
ap : AP	=	pn : PN	(§. 100. Ar.)
ab : AB	=	ap : AP	nach dem vorigen Beweiſe.
pn : PN	=	ab : AB	(§. 11. Ar.)

Es verhält ſich aber, vermöge der Conſtruction, ab zu AB ſo, daß ab nach dem verjüngten Maaße ſo groß iſt, als AB nach dem wahren Maaße, folglich muß auch pn nach dem verjüngten Maasſtabe ſo viel Theile enthalten, als PN nach dem ordentlichen Maaße enthält.

Was §. 172. erinnert wurde, iſt auch hier in Acht zu nehmen, daß man nemlich jederzeit zu der gefundenen Höhe noch die Höhe des Stativs, auf welches man den Winkelmeſſer geſetzt hat, addiren muß.

§. 174.

Aufgabe. Ein jedes Feld oder andern Platz, in welchem man überall nach geraden Linien gehen kann, in Grund zu legen.

Erſte Auflöſung.

Die Figur DFABC (Fig. 85. Tab. 9.) ſtelle das gegebene Feld vor. Da man durch Diagonallinien, welche einander nicht durchſchneiden, jede geradelinichte Figur in ſo viel Triangel zergliedern kann, als dieſelbe Seiten hat weniger zwey, ſo braucht man nur ſolche Diagonalen, wie FC und AB, nebſt den Seiten der Figur zu meſſen, um alle Seiten der Triangel FDC, FCA und ACB zu wiſſen. Wird nun durch Hülfe des verjüngten Maasſtabes aus den gemeſſenen Linien FD, DC und FC der Triangel fdc auf das Pappier getragen, ſo muß derſelbe dem Triangel FDC auf dem Felde ähnlich

seyn. (§. 148.) Macht man ferner den Triangel fac durch Hülfe des verjüngten Maasstabes aus den Seiten des Triangels FAC und den Triangel abc aus den Seiten des Triangels ABC, und setzt die Triangel auf dem Papiere in eben der Ordnung zusammen, in welcher sie sich auf dem Felde befinden, so muß die Figur dfabc auf dem Papiere, der Figur DFABC auf dem Felde ähnlich seyn, weil sie beyde aus ähnlichen Theilen bestehen, die nach einerley Ordnung mit einander verbunden sind. Zu dieser Auflösung hat man also nichts, als eine Meßkette und Stäbe nöthig.

Andere Auflösung.

Durch Hülfe eines Meßtischchens läßt sich ein Feld, in welches man kommen kann, auch folgendergestalt sehr leicht in Grund legen. Man erwähle in einer mittlern Gegend einen gewissen Punct, z. E. den Punct C, (Fig. 86. Tab. 9.) und setze das Tischchen über denselben. Nun visire man mit dem Dioptern-Liniale, ohne das Tischchen zu verrücken, nach allen Ecken des Feldes M, N. Q u. s. f. die man sich durch Stäbe zu bemerken pflegt, und ziehe aus dem Puncte, welcher sich auf den Tischchen senkrecht über den Punct C befindet, die geraden Linien FC, BC, GC u. s. w. wodurch man die Winkel MCN, NCQ, QCR u. s. w. erhält. Hierauf messe man mit der Meßkette die Linien CM, CN, CQ, CR und CP. Auf die Schenkel der Winkel MCN, NCQ, QCR u. s. f. trage man nach dem verjüngten Maasstabe die Linien CM, CN, CQ u. s. f. so daß CF, CB, CG, CA, CS nach dem verjüngten Maaße so groß sind, als CM, CN, CQ, CR, CP nach dem wahren Maaße.

Alsdenn ziehe man die Puncte F, P, G, A und S durch gerade Linien zusammen, so muß die Figur FBGAS auf dem Papiere der Figur MNQRP auf dem Felde ähnlich seyn. Denn der Triangel FCB ist dem Triangel MCN ähnlich, weil vermöge der Construction

$$CF : CB = CM : CN$$
$$\text{und } \angle FCB = \angle MCN \quad (\S.\ 147.)$$

Aus eben dem Grunde ist auch der Triangel BCG dem Triangel NCQ, der Triangel GCA dem Triangel QCR; der Triangel ACS dem Triangel RCP; und der Triangel CGF dem Triangel CPM ähnlich. Folglich

$$\angle FBC = \angle MNC$$
$$\angle CBG = \angle CNQ$$

$$\angle FBC + \angle CBG = \angle MNC + \angle CNQ$$
$$\text{d. i.} \quad \angle FBG = \angle MNQ \quad (\S.\ 13.\ \text{Ar.})$$

und so folgt auf eben die Art aus der Aehnlichkeit der übrigen Triangel, daß auch

$$\angle BGA = \angle NQR$$
$$\angle GAS = \angle QRP$$
$$\angle ASF = \angle RPM$$
$$\angle SFB = \angle PMN$$

Ferner muß sich verhalten, weil, wie vorhin gezeigt wurde $\triangle FCB \sim \triangle MCN$ und $\triangle CBG \sim \triangle CNQ$

$$\left.\begin{array}{l} CB : CN = FB : MN \\ CB : CN = BG : NQ \end{array}\right\} (\S.\ 147.)$$
$$FB : MN = BG : NQ \quad (\S.\ 11.\ \text{Ar.})$$
$$FB : BG = MN : NQ \quad (\S.\ 100\ \text{Ar.})$$

und

und aus eben der Urſache auch

BG : GA = NQ : QR
GA : AS = QR : RP
AS : SF = RP : PM

woraus die Aehnlichkeit der beyden Figuren SFBGA und PMNQR erhellet. (§. 141.)

Dritte Auflöſung.

Mißt man mit dem Winkelmeſſer diejenigen Winkel, welche ſich um den Punct C befinden, trägt dieſelben durch Hülfe des Transporteurs auf das Papier in eben der Ordnung, ſo daß

∠ mcn = ∠ MCN
∠ ncq = ∠ NCQ
∠ qcr = ∠ QCR u. ſ. f.

und macht, wie vorhin, die Linien cm, cn, cq, cr, cp nach dem verjüngten Maasſtabe ſo groß, als CM, CN, CQ, CR, CP nach dem wahren Maaße ſind, ſo muß die Figur mnqrp auf dem Papiere ebenfals der Figur MNQRP auf dem Felde ähnlich ſeyn. Der Beweis von dieſer Auflöſung iſt mit dem vorigen völlig einerley.

§. 175.

Aufgabe. Ein Feld oder einen andern Platz, in welchen man nicht kommen kann, in Grund zu legen.

Erſte Auflöſung.

Wenn man um das gegebene Feld herum gehen kann, ſo darf man nur die Seiten und Winkel meſſen, hernach durch Hülfe des verjüngten Maas-

ſtabes und des Transporteurs daraus eine Figur conſtruiren, ſo muß die Figur auf dem Papiere der Figur auf dem Felde ähnlich ſeyn. Denn hat (Fig. 85.) fa, ab, bc u. ſ. w. nach dem verjüngten Maasſtabe ſo viel Theile, als FA, AB, BC u. ſ. f. nach dem groſſen Maaße, und iſt

$$\begin{aligned} \sphericalangle fab &= FAB \\ \sphericalangle abc &= ABC \\ \sphericalangle bcd &= BCD \text{ \&c.} \end{aligned}$$

ſo iſt die Figur dfabc der Figur DFABC ähnlich. (§. 141.)

Andre Auflöſung.

Wenn man nicht um den ganzen Plaz herum gehen kann, ſo erwähle man ſich zwey Oerter, z. E. M und P (Fig. 87. Tab. 9.) deren Entfernung ſich unmittelbar meſſen läßt, und aus denen beyden man alle Ecken der Figur, die man durch Stäbe bezeichnen muß, ſehen kann. Von dieſen beyden Puncten ſtelle man ſich gerade Linien gegen alle Ecken des Feldes vor, und meſſe mit dem Winkelmeſſer die Winkel o, u, e, x, y und r, welche dieſe Linien mit einander machen. Hierauf meſſe man die Linie MP, ziehe auf dem Papiere eine Linie mp, welche nach dem verjüngten Maasſtabe ſo groß iſt, als MP nach dem wahren Maaße, trage an dem einen Endpuncte derſelben m mit dem Transporteur die Winkel o, u, e, und an den andern Endpunct p die Winkel x, y, r, in eben der Ordnung, wie ſie ſich auf dem Felde befinden; verlängere die Schenkel derſelben bis ſie einander durchſchneiden, und ziehe aus den Durchſchnittspuncten a, d und f die geraden Linien am, ad, df, fp, ſo muß die Figur ampfd auf dem Papiere,

welche

welche dadurch entsteht, der Figur AMPFD auf dem Felde ähnlich seyn. Denn

∠ amp = ∠ AMP
∠ apm = ∠ APM vermöge der Constr.

△ map ∽ △ MAP (§. 145.)

∠ dmp = ∠ DMP
∠ mpd = ∠ MPD vermöge der Constr.

△ mdp ∽ △ MDP (§. 145.)

∠ fmp = ∠ FMP
∠ fpm = ∠ FPM vermöge der Constr.

△ mfp ∽ △ MFP (§. 145.)

Weil nun △ amp ∽ △ AMP, so folgt, daß

mp : ma = MP : MA (§. 145.)
oder mp : MP = ma : MA (§. 100. Ar.)
weil △ mfp ∽ △ MFP

---

mp : pf = MP : PF (§. 145.)
oder mp : MP = pf : PF (§. 100. Ar.)
und weil △ mdp ∽ △ MDP

---

mp : md = MP : MD (§. 141.)

---

mp : MP = md : MD (§. 100. Ar.)
mp : MP = ma : MA wie oben erwiesen wurde

---

ma : MA = md : MD (§. 11. Ar.)

---

ma : md = MA : MD (§. 100. Ar.)
∠ amd = ∠ AMD vermöge der Constr.

△ amd ∽ △ AMD (§. 147.)
am : ad = AM : AD
∠ mad = ∠ MAD
∠ adm = ∠ ADM

Auf eben die Art läßt sich auch zeigen, daß die Seiten df und fp sich wie die Seiten DF und FP verhalten. Denn aus der Aehnlichkeit der beyden Triangel mdp und MDP folgt die Proportion

mp

mp : pd = MP : PD (§. 141.)

mp : MP = pd : PD (§. 100. Ar.)
mp : MP = fp : FP nach dem vorhergehend. Beweiſe

pd : PD = fp : FP (§. 11. Ar.)

pd : fp = PD : FP (§. 100. Ar.)
< dpf = < DPF vermöge der Conſtr.

△ dpf ∽ △ DPF (§. 147.)
d. i. df : fp = DF : FP
und < pdf = < PDF
< mdp = < MDP weil △ mdp ∽ △ MDP
< adm = < ADM wie oben erwieſen wurde

< pdf + < mdp + < adm = < PDF + < MDP + < ADM (§. 13. Ar.)
d. i. < adf = < ADF (§. 10. Ar.)

Da nun alle Winkel der Figur ampfd den Winkeln in der Figur AMPFD gleich ſind, und die Seiten der erſten ſich eben ſo verhalten, wie die Seiten der andern, ſo iſt die Aehnlichkeit derſelben richtig erwieſen. (§. 141.)

§. 176.

Wenn man den Inhalt eines Feldes oder anders Platzes ausrechnen ſoll, ſo darf man nur daſſelbe in Grund legen, die Figur auf dem Papiere durch Diagonallinien in Triangel zergliedern, von einem jedem Triangel die Grundlinie und Höhe nach demjenigen verjüngten Maasſtabe meſſen, nach welchem man die Figur verzeichnet hat, hierauf den Inhalt aller Triangel berechnen und zuſammen addiren, ſo muß die Summe dieſer Triangel den Inhalt des ganzen Feldes anzeigen. (§. 134.)

Sechstes Capitel.

Von den Cörpern.

§. 177.

Der cörperliche Raum, der durch zwey gleiche und ähnliche Figuren, die einander parallel liegen, und durch eben so viel Parallelogramme, als eine solche Figur Seiten hat, begränzt wird, heißt ein **Prisma**, welches also entsteht, wenn sich eine ebene Fläche, wie der Triangel FNQ (Fig. 88. Tab. 10.) an einer geraden Linie parallel herunter bewegt. Die gleichen und ähnlichen Figuren, wie △FNQ und △EMS, werden die **Grundflächen**, und die Parallelogramme, wie EFNM, MNQS und EFQS, welche die übrigen Grenzen desselben ausmachen, die **Seitenflächen** genannt. Hat eine Grundfläche drey Seiten, so heißt das Prisma ein **dreyeckichtes**; hat sie vier Seiten, ein **viereckichtes** Prisma u. s. w. Stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen, so wird auch das Prisma **senkrecht** oder **gerade** (prisma rectum) genannt, stehen sie aber schief auf demselben, so heißt man es ein **schiefes** Prisma.

§. 178.

Ein **Parallelepipedum** (Fig. 89.) ist nichts anders, als ein viereckichtes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogrammen sind. Ein Parallelepipedum, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, (Fig. 92.) wird ein **Würfel** oder **Cubus** genannt, welcher also in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen ist. Die Seite eines solchen Quadrates,

z. E.

z. E. CN oder CD heißt auch die **Seite des Würfels.**

§. 179.

Ein Prisma, dessen Grundflächen reguläre Vielecke von unendlich viel Seiten, d. i. Cirkel sind, erhält den Namen eines **Cylinders**, (Fig. 90. Tab. 10.) die gerade Linie, welche die Mittelpuncte der Grundflächen verbindet, heißt die **Axe** des Cylinders. Steht die Axe senkrecht auf der Grundfläche, wie CN, so heißt der Cylinder ein **aufrechter** oder **senkrechter**, der also entsteht, wenn sich ein Rechteck, wie CDQN um eine Seite, z. E. CN bewegt: macht aber die Axe wie CG (Fig. 91.) schiefe Winkel auf der Grundfläche, so wird auch der Cylinder ein **schiefer** genannt.

§. 180.

Durch die **Höhe** der jetzt erklärten Cörper versteht man diejenige senkrechte Linie, die sich von der einen Grundfläche auf die entgegengesetzte ziehen läßt. Bey den senkrechten Prismaten ist daher die Höhe einerley mit denjenigen Seiten der Seitenflächen, welche gegenüberstehende Ecken der Grundflächen verbinden; und bey senkrechten Cylindern kann die Axe zugleich die Höhe vorstellen. So könnte z. E. in dem dreyeckichten geraden Prisma NFQSME (Fig. 88.) die Seite FE, und in dem Cylinder BDQM (Fig. 90.) die Axe CN die Höhe bedeuten.

§. 181.

Wenn man die Erklärungen prismatischer Cörper erwägt, so wird man leicht einsehen, daß jeder Schnitt in einem Prisma, welcher nach einer ebenen Flä-

Fläche und parallel mit den Grundflächen geschieht; eine Figur geben muß, die den Grundflächen gleich und ähnlich ist; und weil die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, so müssen lauter gleiche Cirkel entstehen, wenn man Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschneidet.

§. 182.

Wollte man einen prismatischen Cörper grösser oder kleiner machen, ohne daß er aufhörte ein Prisma zu seyn, so müßte man entweder seine Grundfläche, oder seine Höhe, oder beydes verändern; denn die Seitenflächen liessen sich nicht vergrössern oder verkleinern, ohne daß die Höhe oder die Grundflächen dadurch vergrössert oder verkleinert würden. Es ist also klar, daß die Grösse eines prismatischen Cörpers durch seine Grundfläche und Höhe völlig bestimmt wird. **Folglich sind alle Prismata und Cylinder einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben.** Weil auch ein Dreyeck so groß als ein Viereck, oder als ein Fünfeck u. s. f. seyn kann, so erhellt hieraus, daß auch ein dreyeckichtes Prisma einem viereckichten oder fünfeckichten Prisma u. s. f. gleich seyn muß, wenn die Grundfläche des dreyeckichten der Grundfläche des viereckichten oder fünfeckichten gleich, und die Höhe in beyden einerley ist.

§. 183.

Wenn von einem Puncte, der sich ausserhalb einer geradelinichten Figur befindet, gerade Linien in die Spitzen der Winkel dieser Figur gezogen werden, so schliessen die Triangel, welche dadurch entstehen, mit dieser geradelinichten Figur einen cörperlichen

Raum

Raum ein, welchen man eine **Pyramide** nennt. (Fig. 94. Tab. 10.) Die geradelinichte Figur z. E. DQN wird die **Grundfläche**, die Triangel, z. E. ADN, ANQ und ADQ, welche die übrigen Grenzen der Pyramide ausmachen, die **Seitenflächen**; der Punct A, wo diese Triangel zusammen kommen, die **Spitze**, und die senkrechte Linie, die sich von der Spitze auf die Grundfläche ziehen läßt, die **Höhe** der Pyramide genannt. Von der Anzahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, pflegt man die verschiedenen Arten der Pyramiden zu benennen. Ist daher die Grundfläche ein Dreyeck, so heißt auch die Pyramide **dreyeckicht**, ist sie aber ein Viereck, ein Fünfeck, ein Sechseck u. s. f. so erhält auch die Pyramide den Namen einer **viereckichten, fünfeckichten** oder **sechseckichten Pyramide.**

§. 184.

Eine Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen gleichseitige Triangel sind, heißt ein **Tetraedrum.** (Fig. 98. Tab. 11.)

§. 185.

Ist die Grundfläche ein reguläres Vieleck von unendlich viel Seiten, d. h. ein Cirkel, so wird die Pyramide ein **Kegel** (conus) genannt; die gerade Linie zwischen der Spitze des Kegels und dem Mittelpuncte der Grundfläche heißt seine **Axe**, welche entweder senkrecht, wie AC, (Fig. 95. Tab. 11.) oder schief, wie DC (Fig. 96.) auf der Grundfläche stehet. Im ersten Falle pflegt man den Kegel **gerade** oder **senkrecht**, und im andern Falle schief zu nennen. Wird daher ein rechtwinklichter Triangel, wie

ACG

ACG (Fig. 95.) um eine ſenkrechte Seite, z. E. um AC beweget, ſo muß ein ſenkrechter Kegel entſtehen.

§. 186.

Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchſchnitten, ſo entſteht eine Figur, die der Grundfläche ähnlich iſt. Denn es ſey in der dreyeckichten Pyramide ADNQ (Fig. 94.) der Schnitt BCM parallel mit der Grundfläche DNQ, ſo muß auch CM mit NQ, ferner BC mit DN, und BM mit DQ parallel ſeyn; Folglich

$$\left.\begin{array}{l} AC : AN = CM : NQ \\ AC : AN = BC : DN \end{array}\right\} \text{(§. 146.)}$$

$$CM : NQ = BC : DN \quad \text{(§. 11. Ar.)}$$

$$CM : BC = NQ : DN \quad \text{(§. 100. Ar.)}$$

Aus eben dem Grunde

$$\left.\begin{array}{l} AB : AD = BC : DN \\ AB : AD = BM : DQ \end{array}\right\} \text{(§. 146.)}$$

$$BC : DN = BM : DQ \quad \text{(§. 11. Ar.)}$$

$$BC : BM = DN : DQ \quad \text{(§. 100. Ar.)}$$

Weil alſo die Seiten des Triangels BCM ſich eben ſo verhalten, wie die Seiten des Triangels DNQ, ſo iſt klar, daß der erſtere Triangel, welcher durch den parallelen Schnitt entſtanden, dem andern Triangel DNQ, d. i. der Grundfläche der Pyramide ähnlich iſt. (§. 148.) Was jetzt von dreyeckichten Pyramiden erwieſen worden iſt, gilt auch von den vieleckichten, weil ſich dieſelben in dreyeckichte Pyramiden zergliedern laſſen.

§. 187.

Wenn man alſo einen Kegel nach einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche durchſchneidet, ſo

muß durch den Schnitt z. E. DNE (Fig. 95.) ein Cirkel entstehen, welcher desto grösser seyn wird, je näher der Schnitt der Grundfläche des Kegels ist. Wäre also die Entfernung des Schnitts von der Grundfläche undenklich klein, so müste der Cirkel, welcher dadurch entstünde, von der Grundfläche unendlich wenig, d. i. gar nicht unterschieden seyn. Man kann sich daher einen Kegel als eine Summe von Cylindern vorstellen, deren Höhe undenklich klein ist.

§. 188.

Aus der Erklärung einer Pyramide und eines Kegels wird man leicht einsehen, daß die Grösse dieser Körper ebenfalls durch die Grösse ihrer Gründflächen und Höhen bestimmt wird. **Es müssen also alle Pyramiden, und daher auch alle Kegel, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, einander gleich seyn.**

§. 189.

Wenn sich (Fig. 93. Tab. 10.) ein halber Cirkel um den Diameter bewegt, bis er wieder in die erste Lage kömmt, ohne daß der Diameter seine Lage verändert, so entsteht eine **Kugel.** Die krumme Fläche, welche die Kugel begrenzt, heißt ihre **Oberfläche**; der Mittelpunct des halben Cirkels, durch dessen Bewegung sie erzeugt wird, und welcher überall gleich weit von der Oberfläche der Kugel absteht, heißt auch der **Mittelpunct** der Kugel; jede gerade Linie, die von einem Puncte der Oberfläche in den entgegengesetzten durch den Mittelpunct der Kugel gezogen werden kann, der **Diameter** oder **Durchmesser**, und die Hälfte davon, d. i. ei-

ne

ne gerade Linie von der Oberfläche in den Mittelpunct, der **Radius** oder **Halbmesser der Kugel.**

§. 190.

Aus der Erklärung einer Kugel erhellt also, daß alle Halbmesser und folglich auch alle Durchmesser von einer oder von zwey gleichen Kugeln einerley Grösse haben.

§. 191.

Wenn ein Cörper durch lauter reguläre und gleiche Flächen begrenzt ist, und die cörperlichen Winkel, welche durch die ebenen Winkel dieser Flächen entstehen, einander gleich sind, so wird derselbe ein **regulärer**, oder **ordentlicher** Cörper genannt. Alle übrigen, wo nur eins von diesen Stücken fehlet, heissen **irregulär**, oder **unordentlich**. Von den prismatischen Cörpern ist daher nur der **Würfel**, und von den pyramidalischen nur das Tetraedrum regulär. Ausser diesen beyden aber, welche schon oben erklärt worden sind, giebt es noch drey reguläre Cörper, nemlich das **Octaedrum**, das **Icosaedrum** und das **Dodecaedrum**. Das **Octaedrum** (Fig. 97. Tab. II.) ist in acht gleichseitige Triangel, das **Icosaedrum** (Fig 100.) in zwanzig gleichseitige Triangel, und das **Dodecaedrum** (Fig. 99.) in zwölf reguläre Fünfecke eingeschlossen.

§. 192.

Zum Ausmessen der Cörper nimmt man in der Geometrie **Würfel** an, weil man sich durch dieselbe die unmittelbare Ausmessung am leichtesten vorstellen kann, und benennt dieselben von der Länge ihrer Seiten. Also ist eine **Cubikruthe** nichts anders,

als ein Würfel, dessen Seite, d. i. Länge, Breite und Dicke eine Ruthe beträgt; ein **Cubikschuh**, ein Würfel, dessen Seite einen Schuh; ein **Cubikzoll**, ein Würfel, dessen Seite einen Zoll, und eine **Cubiklinie**, ein Würfel, dessen Seite eine Linie lang ist. Hieraus wird man auch leicht einsehen, was eine Cubikmeile, eine Cubikelle u. s. w. bedeutet. Man bezeichnet aber diese Maaße wie die Längenmaaße, nur daß man zum Unterschiede entweder einen kleinen Würfel oder den Buchstaben c rechter Hand oben an die Zahl setzet. So bedeuten z. E. folgende Zahlen $37^{c'}$, $432^{c''}$, $89^{c'''}$, $6^{c''''}$, so viel als 37 Cubikruthen, 432 Cubikschuhe, 89 Cubikzolle und 6 Cubiklinien. Im gemeinen Leben aber pflegt man nicht allemal den cörperlichen Raum durch Würfel auszumessen; denn so ist bekannt, daß man z. E. die Fässer nicht durch Cubikschuhe, u. s. f. sondern durch Kannen, welches cylindrische Gefäße sind, ausmißt.

§. 193.

Aufgabe. Ein senkrechtes Parallelepipedum auszumessen, dessen Grundfläche ein Rectangulum ist.

Auflösung.

Es sey das senkrechte Parallelepipedum CNAGRQD (Fig. 104. Tab. 12.) auszumessen, und DS sey die Seite desjenigen Würfels, welcher das Maas seyn soll. Man messe ein Paar an einander liegende Seiten der Grundfläche, z. E. **NA** und **NC**, ingleichen die Höhe **ND** durch die Seite DS des angenommenen Würfels, so muß das Product $NA \times NC \times ND$, d. i. in diesem Falle $3 \times 4 \times 6 = 72$ diejenige Zahl seyn, aus welcher

man

man sehen kann, wie vielmal das Parallelepipedum den zum Maas angenommenen Würfel, dessen Seite DS ist, enthalte.

Beweis.

Weil DS in NA dreymal, und in NC viermal enthalten ist, so sieht ein jeder leicht ein, daß man den angenommenen Würfel über die Grundfläche des Parallelepipedi 3 ✕ 4 mal wird stellen können, und weil die Höhe ND sechsmal so groß ist, als die Seite des Würfels DS, so ist ferner klar, daß die Schicht von 3 ✕ 4 Würfeln 6 mal in dem ganzen Parallelepipedo Raum haben, und folglich der Inhalt desselben 3 ✕ 4 ✕ 6 oder 72 Würfel seyn muß.

§. 194.

Weil NA ✕ NO den Inhalt der Grundfläche ausdrückt, indem dieselbe, vermöge der Voraussetzung ein Rechteck ist, (§. 131.) so ist klar, daß in dergleichen Fällen das Product aus der Grundfläche in die Höhe den cörperlichen Inhalt anzeigt.

§. 195.

Da ein Würfel nichts anders ist, als ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, (§. 178.) so muß der Inhalt desselben, d. i. ein Product aus seiner Grundfläche in die Höhe der Cubikzahl seiner Seite gleich seyn. Denn ist (Fig. 103. Tab. 12.) das Parallelepipedum QBADSMP ein Würfel, und daher BA = BQ = BP, so ist das Product, welches den Inhalt desselben ausdrückt, nemlich BA ✕ BQ ✕ BP = BA ✕ BA ✕ BA, d. i. BA^3. Man mißt daher einen gegebenen Würfel aus, wenn man

untersucht, wie oft die Seite desjenigen Würfels, den man zum Maasstabe angenommen hat, in der Seite des auszumessenden Würfels enthalten ist, und die Zahl, welche dieses anzeigt, zur dritten Dignität erhebet. Wäre z. E. PR die Seite desjenigen Würfels, wodurch der grössere Würfel QBADSMP ausgemessen werden sollte, und wäre PR in PM viermal enthalten, so würde der grössere Würfel den zum Maas angenommenen kleinern Würfel 4 × 4 × 4, d. i. 64 mal in sich fassen. Findet man nun den Inhalt eines Würfels, wenn man die Seite desselben mißt und zur Cubikzahl erhebet, so ist klar, daß man umgewendet aus dem gegebenen Inhalte eines Würfels die Seite desselben finden muß, wenn man aus dem Inhalte die Cubikwurzel ziehet.

§. 196.

Hieraus wird man also leicht beurtheilen können, wie das vorhin angeführte cörperliche Maas einzutheilen sey. Denn da eine Längenruthe nach der geometrischen Eintheilung 10 Längenschuh, ein Längenschuh 10 Längenzoll u. s. w. enthält, so muß eine Cubikruthe 10 × 10 × 10, d. i. 1000 Cubikschuh, und aus eben dem Grunde ein Cubikschuh 1000 Cubikzoll, und ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien enthalten. Wollte man aber in dem Längenmaaße die Eintheilung von 12 zu 12 annehmen, und also durch einen Schuh den 12ten Theil einer Ruthe u. s. f. verstehen, so würde eine Cubikruthe 12 × 12 × 12, d. i. 1728 Cubikschuh, und ein Cubikschuh 1728 Cubikzoll, u. s. w. ausmachen.

§. 197.

Auch die übrigen Parallelepipeda, die keine Rechtecke zu Grundflächen haben, werden ausgemes-

sen,

sen, wenn man ihre Grundfläche ausrechnet, und in die Höhe multiplicirt, weil ein Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein schiefwinklichtes Parallelogram ist, einem andern, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, gleich seyn muß, wofern nur die Grundfläche des ersten so groß, als die Grundfläche des andern, und die Höhe in beyden einerley ist. (§. 182.)

§. 198.

Man theile ein Parallelepipedum, z. E. CBDMP (Fig. 105.) durch eine ebene Fläche dergestalt, daß der Schnitt nach den Diagonallinien BG und QM der Grundflächen gehet, so muß dasselbe dadurch in zwey gleiche dreyeckichte Prismata zergliedert werden. Denn die beyden dreyeckichten Prismata, welche durch diese Theilung entstehen, haben einerley Höhe, und ihre Grundflächen, nemlich die Triangel CBG und BDG sind einander gleich, weil ein Parallelogram durch die Diagonallinie in zwey gleiche Triangel getheilt wird. (§. 92.) Folglich müssen sie auch selbst von gleichem Inhalte (§. 182.) und daher jedes die Hälfte von dem Parallelepipedo seyn. Es sey also die Höhe des Parallelepipedi $=$ 10″, seine Grundfläche CBDG $=$ 48□″, folglich die Grundfläche des dreyeckichten Prisma, nemlich $\triangle$ CBG $= \frac{48\square''}{2}$ oder 24□″, so müßte der cörperliche Inhalt des Parallelepipedi 48 $\times$ 10, d. i. 480^{c}″, folglich der Inhalt des dreyeckichten Prisma $\frac{1}{2} \times 48 \times 10$ oder 24 $\times$ 10, d. i. 240^{c}″ seyn; woraus also erhellt, daß auch der Inhalt eines dreyeckichten Prisma gefunden wird, wenn man den Triangel, welcher die Grundfläche desselben ist, ausrechnet, und hernach in die Höhe multiplicirt.

§. 199.

Weil sich alle vielseitige Figuren durch Diagonallinien in Triangel zertheilen lassen, so folgt hieraus, daß man ein vieleckichtes Prisma in lauter dreyeckichte von eben der Höhe zergliedern kann, deren Grundflächen zusammengenommen die Grundfläche des vieleckichten ausmachen. Multiplicirt man nun die Summe der Grundflächen dieser dreyeckichten Prismaten, aus welchen das vieleckichte bestehet, d. i. die Grundfläche des vieleckichten in die Höhe desselben, so muß man nothwendig den Inhalt aller dieser dreyeckichten, und folglich des ganzen vieleckichten Prisma erhalten. Es wird also ein jedes Prisma ausgemessen, wenn man seine Grundfläche in die Höhe multipliciret.

§. 200.

Weil die Cylinder Prismata sind, welche Cirkel zu Grundflächen haben, (§. 179.) so wird auch der cörperliche Inhalt eines Cylinders gefunden, wenn man die Grundfläche desselben in die Höhe multiplicirt.

§. 201.

Lehrsatz. Eine dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckichten Prisma, das eben die Grundfläche und Höhe hat.

Beweis.

Man zerschneide ein dreyeckichtes Prisma, z. E. ABFDC (Fig. 106. Tab. 12.) durch eine Ebene dergestalt, daß der Schnitt nach den Diagonallinien zweyer Seitenflächen, z. E. nach den Diagonalen AD

AD und BD gehet, so ist der Theil ABDN eine Pyramide, welche mit dem dreyeckichten Prisma einerley Grundfläche und Höhe hat. Hierauf zertheile man das andre Stück dieses Prisma nach der Diagonallinie der dritten Seitenfläche AF, und der ersten AD, so entstehen die beyden Pyramiden AFDC und ABFD. Die Pyramide AFDC hat ebenfalls einerley Grundfläche und Höhe mit dem Prisma, und also auch einerley Grundfläche und Höhe mit der vorigen Pyramide ABDN, woraus die Gleichheit dieser beyden Pyramiden folget. (§. 188.) Nimmt man nun in der ersten Pyramide ABDN den Triangel NBD zur Grundfläche an, so ist A die Spitze derselben, welches auch die Spitze der dritten Pyramide ABFD ist, wenn man den Triangel BDF als ihre Grundfläche betrachtet. Da nun diese beyden Pyramiden eine gemeinschaftliche Spitze, und folglich einerley Höhe haben, auch ihre Grundflächen, nemlich die Triangel NBD und BDF einander gleich sind, (§. 92.) so muß auch die Pyramide ABDN so groß, als die Pyramide ABFD seyn. (§. 188.) Sind nun alle drey Pyramiden, in welche das dreyeckichte Prisma zerschnitten worden, gleich groß, (§. 11. Ar.) so muß eine jede davon, und folglich auch ABDN, d. i. eine Pyramide, die mit dem Prisma einerley Grundfläche und Höhe hat, der dritte Theil davon seyn.

§. 202.

Der vorige Beweis ist am leichtesten einzusehen, wenn man sich ein dreyeckichtes Prisma von Holz oder von einer andern Materie machen, und auf die gehörige Art zerschneiden läßt.

§. 203.

Man findet also den cörperlichen Inhalt einer dreyeckichten Pyramide, wenn man den dritten Theil von dem Producte aus ihrer Grundfläche in ihre Höhe nimmt.

§. 204.

Alle übrigen Pyramiden lassen sich wie die vieleckichten Prismata in dreyeckichte zergliedern. Es ist daher auch der cörperliche Inhalt der vieleckichten Pyramiden der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 205.

Weil die Kegel Pyramiden sind, die reguläre Unendlichecke, d. i. Cirkel zu Grundflächen haben; so läßt sich auch der cörperliche Inhalt eines Kegels finden, wenn man die Grundfläche in die Höhe multipliciret, und dieses Product durch 3 dividirt.

§. 206.

Vergleicht man also einen Cylinder mit einem Kegel, welcher einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat, so ist klar, daß der Kegel der dritte Theil von einem solchen Cylinder seyn muß.

§. 207.

Lehrsatz. Alle prismatischen Cörper verhalten sich, wie die Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen haben, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen einerley sind.

Beweis.

Es heisse ein Prisma P, seine Grundfläche G,

und

und seine Höhe H; ein anderes Prisma p, seine Grundfläche g, und seine Höhe h, so ist

$$\left.\begin{array}{rcl} P & = & G \times H \\ p & = & g \times h \end{array}\right) \text{ (§. 199.)}$$

$$P : p = G \times H : g \times h \text{ (§. 9. Ar.)}$$

Nimmt man nun an, daß die Grundflächen in beyden gleich seyn sollen, folglich $G = g$, so kann man in der vorigen Proportion statt g den Buchstaben G setzen,

$$P : p = G \times H : G \times h$$

$$P : p = \frac{G \times H}{G} : \frac{G \times h}{G} \text{ (§. 104. Ar.)}$$

d. i. $P : p = H : h$ (§. 19. Ar.)

Sind aber die Höhen in beyden gleich, d. i. $H = h$, so kann man in der vorigen Proportion statt h die Grösse H setzen. Folglich

$$P : p = G \times H : g \times H$$

$$P : p = \frac{G \times H}{H} : \frac{g \times H}{H} \text{ (§. 104. Ar.)}$$

d. i. $P : P = G : g$ (§. 19. Ar.)

§. 208.

Es müssen sich also auch die Cylinder, wie die Höhen verhalten, wenn sie gleiche Grundflächen, und wie die Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben. (§. 200.) Da nun die Grundflächen der Cylinder Cirkel sind, (§. 179.) und die Cirkel sich wie die Quadrate ihrer Diameter oder ihrer Radien verhalten, (§. 161. 162.) so ist klar, daß sich die Cylinder, die einerley Höhe haben, wie die Quadrate der Diameter oder der Radien ihrer Grundflächen verhalten müssen.

§. 209.

Weil sich die Drittel wie die Ganzen verhalten, (§. 103. Ar.) und der Inhalt der Pyramiden und Kegel der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe ist, (§. 204. 205.) so müssen sich Pyramiden und Kegel von gleichen Höhen, wie die Grundflächen, und von gleichen Grundflächen, wie die Höhen verhalten.

§. 210.

Da die Grundflächen der Kegel nichts anders, als Cirkel sind, (§. 185.) so gilt auch von den Kegeln, die einerley Höhen haben, dasjenige, was von den Cylindern von gleichen Höhen §. 208. gesagt worden ist, daß sie sich nemlich eben so verhalten, wie die Quadrate der Durchmesser oder der Halbmesser ihrer Grundflächen.

§. 211.

Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so entstehet allemal ein Cirkel, und geht der Schnitt durch den Mittelpunct, so wird die Kugel dadurch in zwey gleiche Theile zergliedert; der Cirkel, welcher auf diese Art entsteht, wird ein **größte Cirkel** der Kugel genannt, weil er grösser ist, als alle übrigen, die man sich auf der Kugelfläche vorstellen kann, und die nicht einerley Mittelpunct mit der Kugel haben. Zerschneidet man also die Halbkugel parallel mit der Fläche des größten Cirkels, aber so, daß die Schnitte eine undenklich kleine Entfernung von einander haben, so müssen die Theile der Halbkugel, welche durch diese Zergliederung entstehen, für Cylinder von undenklich kleiner Höhe gehalten werden können.

§. 212.

Lehrsatz. Eine Halbkugel ist $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Diameter dem Diameter der Halbkugel, und dessen Höhe ihrem Halbmesser gleich ist.

Beweis.

Es sey (Fig. 107. Tab. 12.) BNCF ein Quadrat, BNF der vierte Theil eines Cirkels, und BNC ein rechtwinklichter Triangel. Nun stelle man sich vor, daß sich diese drey Figuren um die gemeinschaftliche Seite BN bewegen, so muß durch die Bewegung des Quadrats ein Cylinder, durch die Bewegung des Quadranten eine Halbkugel, und durch die Bewegung des rechtwinklichten Triangels ein Kegel entstehen. Da nun diese drey Cörper einerley Höhe haben, so ist klar, daß man aus dem einen eben so viel Stücke wird schneiden können, als aus dem andern und dritten, wenn man denselben einerley Dicke giebt. Wir wollen also setzen, daß sowohl der Cylinder, als auch der Kegel und die Halbkugel parallel mit den Grundflächen durchschnitten würden, und die Schnitte eine undenklich kleine Entfernung von einander hätten, so müßten nicht nur der Cylinder, sondern auch der Kegel (§. 187.) und die Halbkugel (§. 211.) dadurch in lauter kleine Cylinder von einerley Höhen zergliedert werden. Es sey nun PS parallel mit BF, und folglich auch mit NC, so stellt PQ den Halbmesser eines Durchschnitts im Kegel, PG den Halbmesser eines Durchschnitts in der Halbkugel, und PS selbst den Halbmesser eines Durchschnitts im Cylinder vor. Vergleichen wir nun die Quadrate dieser Linien mit einander, so erfahren wir dadurch, wie sich die kleinen

nen Cylinder verhalten, deren Halbmesser sie vorstellen. (§. 208.) Es ist aber

PS = BF (§. 93.)
BF = BG (§. 29.)

PS = BG (§. 11. Ax.)

PS² = BG²

Ferner, weil PQ parallel mit NC

BN : NC = BP : PQ (§. 146.)
BN = NC vermöge der Voraussetzung

BP = PQ

BP² = PQ²

Da nun BNC der Winkel eines Quadrats, und also ein rechter Winkel ist, so muß auch BPG ein rechter Winkel seyn. (§. 65.) Folglich

BG² = BP² + PG² (§. 103.)
BG² = PS² und BP² = PQ² wie vorhin erwiesen wurde

PS² = PQ² + PG² (§. 9. Ax.)

Und weil sich Cylinder von einerley Höhen, wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten, (§. 208.) so müssen die beyden kleinen Cylinder, deren Halbmesser PQ und PG sind, d. i. ein Theil des Kegels, und ein Theil der Halbkugel zusammengenommen einem Theile des Cylinders, welcher eben die Dicke und zum Halbmesser PS hat, nothwendig gleich seyn. Dieses gilt aber nicht nur von denjenigen Theilen dieser Cörper, welche wir jetzt mit einander verglichen haben, denn der Beweis würde immer derselbe seyn, wenn man sich diese Schnitte weiter von der Grundfläche

fläche oder näher vorstellen wollte. Ist also überall ein Theil des Kegels nebst einem Theile der Halbkugel so groß, als ein Theil des Cylinders, so muß auch der ganze Kegel und die ganze Halbkugel zusammengenommen dem ganzen Cylinder gleich seyn. Es ist aber der Kegel, weil er einerley Grundfläche und Höhe mit dem Cylinder hat, der dritte Theil des Cylinders. (§. 206.) Folglich muß die Halbkugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder enthalten, dessen Diameter MF dem Diameter der Halbkugel, und dessen Höhe NB dem Halbmesser derselben gleich ist.

§. 213.

Es ist also die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, dessen Höhe noch einmal so groß ist, als die Höhe des vorigen, d. h. dessen Höhe und Diameter dem Diameter der Kugel gleich ist.

§. 214.

Man könnte daher den cörperlichen Inhalt einer Kugel finden, wenn man den cörperlichen Inhalt eines Cylinders suchte, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich wäre, und davon $\frac{2}{3}$ nähme. Wir wollen den Diameter einer Kugel und des Cylinders, wovon die Kugel $\frac{2}{3}$ seyn soll, d, die Peripherie der Kugel, und folglich auch der Grundfläche dieses Cylinders p nennen, so stellt das Product $\frac{1}{4}$ dp den Inhalt der cylindrischen Grundfläche, (§. 136.) und weil die Höhe des Cylinders dem Diameter der Kugel gleich gesetzt wird, und also ebenfalls d ist, das Product $\frac{1}{4}$ dpd $=$ $\frac{1}{4}$ pd^2 (§. 200.) den cörperlichen Inhalt

halt des Cylinders vor. Der dritte Theil von $\frac{1}{4}$ pd² ist $\frac{1}{12}$ pd² und folglich zwey Drittel davon nemlich $\frac{2}{12}$ pd² = $\frac{1}{6}$ pd² der Inhalt der Kugel. (§. 213.) Hieraus ergiebt sich also die Regel, daß man den cörperlichen Inhalt einer Kugel ausrechnen könne, wenn man das Quadrat ihres Diameters in die Peripherie multiplicire, und dieses Product durch 6 dividire. Es sey z. E. d, d. i. der Diameter einer Kugel 100 Zoll, so wäre p oder die Peripherie derselben 314″ (§. 137.) und daher der cörperliche Inhalt

$$\frac{314 \times 100^2}{6} = \frac{3140000}{6} = 523333\frac{1}{3}^{c''}$$

§. 215.

Wenn man sich vorstellt, daß die Oberfläche der Kugel in undenklich kleine Theile, z. E. in lauter kleine Vierecke zergliedert sey, so wird man diese kleine Theile der Oberfläche für ebene Flächen, und wenn man von den Ecken dieser kleinen Vierecke sich gerade Linien gegen den Mittelpunct der Kugel gedenkt, die ganze Kugel für eine Summe von Pyramiden halten können, deren Höhe der Radius der Kugel, und deren Grundflächen diese unendlich kleinen Vierecke, welche zusammen genommen die ganze Oberfläche der Kugel ausmachen, seyn würden. Es heisse ein solcher undenklich kleiner Theil von der Oberfläche der Kugel g, die Anzahl derselben n und die Oberfläche der Kugel selbst S, so ist

$$g \times n = s$$

Der Radius der Kugel, und also die Höhe der kleinen viereckichten Pyramiden, die zusammengenommen die ganze Kugel ausmachen, heisse r, so ist der

cörperliche Inhalt einer solchen Pyramide, weil g die Grundfläche bedeutet

$$\frac{1}{3} r \times g \quad (\S. 204.)$$

und weil n die Anzahl derselben vorstellt, die Summe aller dieser Pyramiden, folglich der Inhalt der Kugel

$$\frac{1}{3} r \times g \times n \text{ d. i. } \frac{1}{3} r \times s$$

weil $g \times n = s$ vermöge der angenommenen Bedingung. Hieraus ist also klar, **daß man auch den Inhalt der Kugel erhält, wenn man den dritten Theil des Halbmessers in die Oberfläche derselben multipliciret.** Weil nun der Halbmesser die Hälfte des Durchmessers, und folglich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers $\frac{1}{6}$ des Durchmessers ist, so pflegt man diesen Satz auch so auszudrücken. **Das Product aus der Oberfläche der Kugel in den 6ten Theil des Diameters, oder der 6te Theil des Products aus der Oberfläche in den Diameter der Kugel, ist der cörperliche Inhalt derselben.** Nennt man den Diameter, wie vorhin, d, so ist also

$$\frac{1}{3} rs = \frac{1}{6} ds$$

§. 216.

Vergleicht man diesen Satz mit dem vorhergehenden, so läßt sich daraus einsehen, wie man die Oberfläche der Kugel berechnen könne. Denn da nach §. 214. der Inhalt der Kugel durch das Product $\frac{1}{6} pd^2$, und nach §. 215. auch durch das Product $\frac{1}{6} ds$ ausgedrückt werden kann, so folgt hieraus, weil der Buchstabe d einerley Bedeutung hat, daß

$$\frac{1}{6}\ pd^2 = \frac{1}{6}\ ds \quad (\S.\ 9.\ Ar.)$$

$$6 \times \frac{1}{6}\ pd^2 = 6 \times \frac{1}{6}\ ds \quad (\S.\ 17.\ Ar.)$$

d. i. $pd^2 = ds$

$$\frac{pd^2}{d} = \frac{ds}{d} \quad (\S.\ 18.\ Ar.)$$

d. i. $pd = s$ (§. 19. Ar.)

d. h. weil d den Diameter, p die Peripherie, und s die Oberfläche der Kugel bedeutet, **ein Product aus dem Diameter in die Peripherie giebt die Oberfläche der Kugel.**

§. 217.

Weil der gröſste Cirkel einer Kugel mit ihr einerley Mittelpunct und Diameter (§. 211.) folglich auch einerley Peripherie hat, so können die Buchstaben d und p auch den Diameter und die Peripherie des gröſsten Cirkels bedeuten. Das Product $\frac{1}{4}$ pd würde also die Fläche des gröſsten Cirkels vorstellen. (§. 136) Nun war die Oberfläche der Kugel pd. (§. 216.) Da nun pd viermal mehr beträgt, als $\frac{1}{4}$ pd, so ist klar, daſs die Oberfläche der Kugel viermal gröſser ist, als die Fläche des gröſsten Cirkels.

§. 218.

Die Oberfläche der Kugel und der cörperliche Inhalt derselben läſst sich also leicht berechnen, wenn man nur den Diameter gemessen hat. Es sey z. E. der Diameter einer Kugel 50 Schuh, so suche man erstlich die Peripherie

100 : 314 = 50′ : Per.

50

100) 15700 (157′ = Per.

Ist

Ist nun 157′ die Peripherie, so beträgt die Oberfläche der Kugel 157′ × 50′ d. i. 7850 Quadratschuh. (§. 216.) Diese Zahl 7850□′ multiplicire man durch den 6ten Theil von 50, oder durch 50, und dividire das Product mit 6, z. E.

$$\begin{array}{r} 7850\square' \\ 50' \\ \hline 392500 \\ \hline 6)\ 65416\frac{2}{3}c' \end{array}$$

so muß die Zahl $65416\frac{2}{3}$ die Cubikschuh anzeigen, welche eine Kugel enthält, deren Diameter 50 Schuh lang ist. (§. 215.)

§. 219.

Wenn man dem Diameter 100 Theile giebt, so ist der cörperliche Inhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$, wie schon §. 214. gezeigt worden ist. Stellt man sich nun einen Würfel vor, dessen Seite so groß ist, wie der Diameter der Kugel, und folglich ebenfalls 100 Theile enthält, so wird der cörperliche Inhalt desselben 100 × 100 × 100, d. i. 1000000 seyn. (§. 195.) Nennt man nun die Kugel k, und den Diameter d, so verhält sich also

$$k : d3 = 523333\tfrac{1}{3} : 1000000$$

$$k : d3 = 523333\tfrac{1}{3} \times 3 : 1000000 \times 3 \text{ (§. 101. Ar.)}$$

d. i. $k : d3 = 1570000 : 3000000$

$$k : d3 = \frac{1570000}{10000} : \frac{3000000}{10000} \text{ (§. 104. Ar.)}$$

d. i. $k : d3 = 157 : 300$

Nemlich es verhält sich die Kugel zu dem Würfel des Diameters, oder, welches eben so viel

sagen will, der cörperliche Inhalt der Kugel zu der Cubikzahl des Diameters wie 157 zu 300. Da sich aber dieses Verhältnis auf das Verhältnis 100 : 314 gründet, welches nicht nach der größten Schärfe richtig ist, so kann auch dasselbe nicht für ganz vollkommen richtig gehalten werden.

§. 220.

Durch Hülfe des vorigen Verhältnisses läßt sich der cörperliche Inhalt einer Kugel noch auf eine andere Art ausrechnen. Denn verhält sich die Kugel zu dem Würfel des Diameters wie 157 zu 300, so muß sich umgewendet 300 zu 157, wie die Cubikzahl des Diameters zu dem Inhalte der Kugel verhalten. Folglich kann man durch Hülfe der Regel Detri den cörperlichen Inhalt der Kugel finden, wenn man zu 300, 157 und der Cubikzahl des Diameters die vierte Proportionalzahl sucht, d. h. wenn man die Cubikzahl des Diameters durch 157 multiplicirt, und dieses Product hernach durch 300 dividirt. Z. E. es sey der Diameter einer Kugel, deren Inhalt verlangt wird, wie §. 218. angenommen wurde, 50 Schuh. Man suche also von diesem Diameter die Cubikzahl

$$\begin{array}{r} 50' \\ 50 \\ \hline 2500. \\ 50 \\ \hline 125000' \end{array}$$

Nun

Nun schliesse man

$$3\text{ØØ} : 157 = 1250\text{ØØØ}^{c\prime} : \text{Inh. der Kugel}$$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ \hline 7850 \\ 314 \\ 157 \\ \hline 196250 \\ \hline \end{array}$$

$$3)\ 65416\tfrac{2}{3}^{c\prime} = \text{Inh. der Kugel}$$

wie wir ihn auch §. 218. gefunden haben.

§. 221.

Das vorige Verhältnis dient auch dazu, aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel ihren Durchmesser zu finden. Z. E. es sey der Inhalt einer Kugel $91905706\tfrac{2}{3}^{c\prime\prime}$, so muß die vierte Proportionalzahl zu 157, 300 und $91905706\tfrac{2}{3}^{c\prime\prime}$ die Cubikzahl des Diameters, (§. 219.) und daher die Cubikwurzel aus dieser vierten Proportionalzahl der Diameter selbst seyn. (§. 195.) Hieraus ist also klar, daß man aus dem gegebenen Inhalte einer Kugel den Diameter findet, wenn man denselben durch 300 multiplicirt, hierauf dieses Product durch 157 dividiret, und aus dem Quotienten die Cubikwurzel suchet. Die Rechnung selbst würde also folgende seyn, wo d^3 die Cubikzahl des Diameters bedeutet.

$157 : 300 = 91905706\frac{2}{3}'' : d^3$

300

27571711 800

200

157) 27571712 000 (175616000$''' = d^3$

157

1187

1099

881

785

967

942

251

157

942

942

0000

175|616|000(560$'' = d$

125

50|616

(75)

450

540

216

50616

0 | 000

Es beträgt also die Grösse des Diameters der gegebenen Kugel 560 Zoll oder 56 Schuh.

§. 222.

Es heisse eine Kugel K und ihr Diameter D, eine andere Kugel k und ihr Diameter d, so folgt, daß

$$\left.\begin{array}{l} K : D^3 = 157 : 300 \\ k : d^3 = 157 : 300 \end{array}\right\} (\S.\ 219.)$$

$$K : D^3 = k : d^3 \quad (\S.\ 11.\ Ar.)$$

$$K : k = D^3 : d^3 \quad (\S.\ 100.\ Ar.)$$

d. h. die Kugeln verhalten sich wie die Würfel oder wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser. Ist also der Diameter einer Kugel zweymal so groß, als der Diameter einer andern Kugel, so muß sich die erste Kugel zu der andern wie $2^3 : 1^3$ d. h. wie 8 zu 1 verhalten. Wäre der Diameter der ersten Kugel dreymal so groß, als der Diameter der andern Kugel, so müßte die erste Kugel 27mal gröſſer seyn, als die andre Kugel, weil in diesem Falle $D^3 : d^3 = 3^3 : 1^3$ d. i. 27 : 1 u. s. f.

§. 223.

Weil man im gemeinen Leben, wie schon §. 192. angemerkt worden ist, den cörperlichen Raum nicht allemal durch Würfel, sondern in vielen Fällen durch Cylinder auszumessen pflegt, so soll noch kürzlich gezeigt werden, wie man ohne weitläuftige Rechnung die Anzahl von Kannen finden könne, die in einem Fasse Raum haben, indem dieses derjenige Fall ist, der am häufigsten vorkömmt. Man nennt aber dergleichen Ausmessung eines Fasses **Visiren**, und daher denjenigen Maasstab, dessen man sich zu dieser Absicht bedient, einen **Visirstab**.

§. 224.

Die Verfertigung eines Visirstabes geschiehet auf folgende Art. Man trägt erstlich auf beyde Schenkel eines rechten Winkels z. E. des Winkels B (Fig. 101. Tab. 11.) den Diameter desjenigen Kan-

nenmaßes, welches an dem Orte eingeführt ist, wo der Visirstab gebraucht werden soll, und macht also BA = BC so groß als diesen Diameter. Zieht man nun die Hypothenuse AC, so hat man den Diameter eines zweykannigen Gefäßes von eben der Höhe, weil Cylinder, die gleiche Höhen haben, sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, (§. 208.) AC^2 aber so groß ist, als $2BC^2$. Denn

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 103.)
$AB^2 = BC^2$ weil AB = BC vermöge der Constr.
$AC^2 = BC^2 + BC^2 = 2BC^2$

Macht man also BD = AC, und zieht die Hypothenuse AD, so erhält man den Diameter eines dreykannigen Gefäßes, welches die Höhe eines einkannigen hat; denn

$AD^2 = AB^2 + BD^2$ (§. 103.)
$BD^2 = AC^2$ weil BD = AC
$AD^2 = AB^2 + AC^2$ (§. 9. Ar.)
$AB^2 = BC^2$ $AC^2 = 2BC$
$AD^2 = BC^2 + 2BC^2 = 3BC^2$ (§. 9. Ar.)

Weil nun das Quadrat von AD dreymal so groß ist, als das Quadrat von BC, und Cylinder von einerley Höhe sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, (§. 208.) so muß AD der Diameter eines 3kannigen Gefäßes seyn, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat. Man mache daher ferner, BF = AD, und ziehe AF, so hat man aus eben dem Grunde den Diameter eines vierkannigen Gefässes, von eben der Höhe. Wird nun wieder BG = AF gemacht und AG gezogen, so ist dieses der Diameter eines 5kannigen Gefässes, wie man leicht aus dem vorigen Beweise einsehen wird. Fährt

man

man also auf diese Art fort, so erhält man die Durchmesser von 6kannigen, 7kannigen, 8kannigen u. s. w. Gefässen, in welchen allen einerley Höhe, nemlich die Höhe des Kannenmaasses angenommen wird. Diese Durchmesser BC, BD, BF, BG u. s. f. trägt man auf die eine Seite eines prismatischen Stabes, den man von harten Holze, Elfenbein oder Metall machen läßt, und schreibt die in der Figur dabey stehenden Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. dazu, damit man sehen könne, was für einen Diameter jede Linie bedeute. Auf die andre Seite des Stabes setzt man die Höhe des Kannengefässes so vielmal hinter einander, als es die Länge des Stabes erlaubet, so ist der ganze Visirstab fertig, dessen Gebrauch sich schon aus seiner Construction erkennen läßt. Nemlich mit derjenigen Seite, auf welcher sich die Durchmesser befinden, mißt man den Diameter von der Grundfläche des cylindrischen Gefässes, dessen Inhalt man wissen will, damit man sieht, wie viel Kannen auf der Grundfläche des Cylinders neben einander stehen können. Mit der andern Seite aber, welche die Höhen des Kannenmaasses enthält, mißt man die Länge, oder die Höhe des auszumessenden Cylinders, so erfährt man dadurch, wie vielmal die Anzahl der Kannen, die auf der Grundfläche neben einander Raum haben, über einander stehen können.

§. 225.

Die Fässer, zu deren Ausmessung eigentlich der Visirstab gebraucht wird, sind zwar nicht vollkommene Cylinder, indem der Diameter des Bodens viel kleiner ist, als der Diameter des Bauches. Allein man hat durch die Erfahrung gefunden, daß der Fehler sehr unbeträchtlich ist, wenn man ein gewöhnli-

ches Faß einem Cylinder gleich schätzt, dessen Höhe mit der Länge des Fasses übereinkommt, und dessen Diameter die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beyden Diametern des Bodens und des Bauches, d. h. die halbe Summe dieser beyden Diameter ist. Sollte man also z. E. das Faß BCNSM (Fig. 102. Tab. 11.) visiren, dessen Inhalt weniger, als des Cylinders PAFR und mehr, als des Cylinders BCSM betragen muß, so messe man erstlich mit derjenigen Seite des Visirstabes, welcher die Durchmesser enthält, sowohl den Diameter NB durch das Spundloch, als auch den Diameter CB am Boden, und mit der andern Seite, wo sich die Höhen des Kannengefässes befinden, die Länge des Fasses CS; hierauf addire man die Durchmesser NB und CB zusammen, und multiplicire die Hälfte dieser Summe durch die Länge des Fasses, so zeigt das Product die Menge Kannen an, welche in dem Fasse enthalten sind. Es sey z. E.

Diam. NB = 17
Diam. CB = 13

NB + CB = 30

$\frac{1}{2}$ (NB + CB) = 15
die Länge des Fasses CS = 20

Inhalt des Fasses = 300 Kannen

Die

Die ebene Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Von den Erklärungen und allgemeinen Gründen der Trigonometrie.

§. 1.

Durch das Wort **Trigonometrie** verſteht man nicht überhaupt die Wiſſenſchaft von der Ausmeſſung der Triangel, wie man aus der Etymologie vermuthen könnte, ſondern diejenige Wiſſenſchaft, welche aus einigen bekannten Theilen eines Triangels die übrigen durch Rechnung finden lehret. Sie unterſcheidet ſich alſo blos in Anſehung der Methode von demjenigen Theile der Geometrie, der ſich mit Betrachtung der Triangel beſchäftiget, indem man, wie wir bisher geſehen haben, in der Geometrie das Unbekannte eines Triangels aus dem Bekannten nicht durch Rechnung, ſondern durch Verzeichnung eines gleichen oder eines ähnlichen Triangels findet.

§. 2.

Man pflegt die Trigonometrie gemeiniglich in die ebene und ſphäriſche einzutheilen. Die ebene Trigonometrie (trigonometria plana) womit wir uns jetzt allein beſchäftigen werden, handelt von der Ausrechnung geradelinichter Triangel. In der

sphärischen Trigonometrie aber lehret man solche Triangel ausrechnen, deren Seiten Bogen gröſster Cirkel auf der Oberfläche einer Kugel sind, und die man deswegen sphärische Triangel nennt.

§. 3.

Wenn man überlegt, daß man nach der geometrischen Methode sowohl bey der Verzeichnung eines Triangels, als auch bey der Abmessung desjenigen Theils, den man eigentlich suchet, wegen der Unvollkommenheit der Instrumente und unsrer Sinne nothwendig Fehler begehen muß, so wird man an dem Nutzen und Nothwendigkeit der Trigonometrie nicht zweifeln können, indem man bey der Trigonometrischen Methode die Verzeichnung der Triangel und das wirkliche Abmessen des Unbekannten entbehren kann, und überhaupt alle Grössen durch Rechnen viel genauer, als durch unmittelbares Abmessen gefunden werden, weil man durch den Verstand die kleinsten Theile, die sich durch Hülfe der Sinne nicht im geringsten mehr bemerken lassen, noch sehr deutlich unterscheiden kann. Ein leichtes Beyspiel wird Anfänger von der Wahrheit dieser Sache vielleicht noch mehr überzeugen. Wir wollen setzen, man sollte durch Hülfe der Geometrie eine Weite finden, die viele Meilen betrüge, in welchem Falle man genöthiget seyn würde, um einen ähnlichen Triangel auf das Papier zu verzeichnen, eine Linie von einer Zoll Länge in dem verjüngten Maasstabe einige tausend Ruthen bedeuten zu lassen. Wir wollen also z. E. annehmen, ein Zoll bedeute 20000 Ruthen, und man fehlte im Abmessen der gefundenen Linie, welche die Weite vorstellt, nur um den 100ten Theil eines Zolls, welcher Fehler bey Ungeübten

sehr

sehr häufig vorkömmt, so hätte man bey der zu suchenden Weite schon um 200 Ruthen gefehlt, gesetzt auch, daß bey dem Abmessen der Winkel und linien, die zur Construction des ähnlichen Triangels nöthig sind, und bey der Construction des Triangels selbst, nicht der geringste Fehler wäre begangen worden. Ueberdieses kann man zwar die Winkel durch gute Instrumente bis auf Secunden und Theile der Secunden messen, aber nicht eben so genau auf das Papier tragen, weil die Instrumente, durch welche eine solche Genauigkeit möglich ist, nothwendig eine ansehnliche Grösse haben müssen; daher bey Verzeichnung der Triangel auch in Ansehung dieses Umstandes die Fehler nicht zu vermeiden sind. Am Himmel sind oft linien zu messen, die viel Tausend Millionen Meilen betragen. Wollte man diese Messung durch die Construction eines ähnlichen Triangels nach der geometrischen Methode vornehmen, so müßte man in dem verjüngten Maasstabe eine linie, die etwa einen Zoll lang wäre, 1000 und mehr Millionen Meilen bedeuten lassen. Hier würde, wenn man bey der Abmessung der gefundenen linie nach dem verjüngten Maasstabe nur um den 1000ten Theil eines Zolls fehlte, einen Fehler von einer Million Meilen begehen, wobey doch wieder vorausgesetzt wird, daß die Winkel nach der größten Schärfe verzeichnet worden, welches sich aber nicht thun läßt. Aus diesen Betrachtungen wird auch der Ungeübteste leicht einsehen, daß man ohne die Trigonomotrie in sehr vielen Fällen sich keine grosse Genauigkeit versprechen könnte.

§. 4.

In einem geradelinichten Triangel steht zwar alle:

allemal dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber; z. E. ist in dem Triangel ANQ (Fig. 115. Tab. 12.) der Winkel ANQ grösser als der Winkel AQN, so muß auch nothwendig die Seite AQ grösser seyn, als die Seite AN; denn wenn man den kleinern Winkel AQN in den grössern ANQ setzt, und also $< RNQ = < RQN$ macht, so ist

	RN	= RQ	(§. 76. Geom.)
AR + RN	=	AR + RQ	(§. 18. Ar.)
AR + RQ	=	AQ	(§. 10. Ar.)
AR + RN	=	AQ	(§. 11. Ar.)
AR + RN	>	AN	(§. 32. Geom.)
	AQ	> AN	(§. 9. Ar.)

Allein man würde sich sehr irren, wenn man daraus schliessen wollte, daß die Winkel sich eben so verhalten müßten, wie die gegenüberstehenden Seiten. Denn man betrachte nur einen rechtwinklichten Triangel, in welchem sich zwey gleiche Seiten befinden, z. E. den Triangel ACB (Fig. 101. Tab. 11.) wo $AB = BC$, folglich auch der Winkel ACB = dem Winkel CAB. (§. 74. Geom.) Da B ein rechter Winkel ist, und alle drey Winkel so viel als zwey rechte Winkel betragen, (§. 68. Geom.) so müssen die beyden Winkel ACB und CAB zusammengenommen auch einen rechten Winkel, und daher jeder einzeln genommen einen halben rechten Winkel, oder 45 Grad ausmachen. Die Winkel B und ACB verhalten sich also wie 2 zu 1. Daß sich aber die gegenüberstehenden Seiten AC und AB nicht eben so verhalten, läßt sich leicht aus dem pythagorischen Lehrsatze einsehen. Es sey z. E. BC, und also auch $BA = 5$,

so

so ist $AC^2 = BA^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2$ (§. 103. Geom.)
d. i. $AC^2 = 25 + 25 = 50$

$$AC = \sqrt{50}$$

Sucht man nun die Quadratwurzel aus 50, so findet man die Zahl 7 und einen Bruch, der ohngefehr $\frac{7}{100}$ beträgt. Es verhalten sich also die Seiten AC und AB wie $7\frac{7}{100}$ zu 5, folglich gar nicht wie 2 zu 1, d. i. gar nicht, wie die gegenüberstehenden Winkel. Da sich nun die Cirkelbogen, die man in der Geometrie zum Maas der Winkel annimmt, wie die Winkel selbst, und folglich auch nicht wie die gegenüberstehenden Seiten eines Triangels verhalten, so läßt sich leicht einsehen, daß man die Regel Detri zur Berechnung der Winkel und Seiten eines Triangels aus gegebenen Winkeln und Seiten nicht würde gebrauchen können, wenn man auch statt des Verhältnisses der Winkel, das Verhältnis der Bogen, durch welche sie gemessen werden, nehmen wollte. Man ist daher genöthiget gewesen, in der Trigonometrie gewisse gerade Linien ausfindig zu machen, welche sich statt der Winkel und Bogen setzen lassen, und mit den Seiten der Triangel im Verhältnis stehen. Diese Linien nun müssen vor allen Dingen erklärt werden.

§. 5.

Die senkrechte Linie aus dem Endpuncte eines Bogens auf den Halbmesser, welcher sich aus dem andern Endpuncte desselben ziehen läßt, heißt der **Sinus** dieses Bogens, und auch desjenigen Winkels, der durch diesen Bogen gemessen wird. So ist z. E. die senkrechte Linie NP (Fig. 109. Tab. 12.) der Sinus des Bogens NA, und des Winkels o. Das Zeichen, womit man die Sinus anzeigt, ist der

erste

erste Buchstabe, oder die drey ersten Buchstaben dieses Worts. Das jetzt angeführte Beyspiel würde man daher also schreiben:

NP = S. o = S. NA
oder NP = Sin. o = Sin. NA.

§. 6.

Verlängert man den Sinus NP bis an den entgegengesetzten Punct der Peripherie F, so ist NF eine Chorde, und NP die Hälfte davon, so wie NA die Hälfte des Bogens NAF seyn muß. (§. III. Geom.) Der Sinus eines Bogens ist also die Hälfte einer Chorde, die zu einem noch einmal so grossen Bogen gehört.

§. 7.

Weil die Chorde NF nicht nur zu dem Bogen NAF, sondern auch zu dem Bogen NRF gehöret, so ist NP nicht nur der Sinus des Bogens NA oder des Winkels o, sondern auch des Bogens NR und des Winkels u. Zwey Bogen also, die zusammen eine halbe Peripherie ausmachen, oder zwey Winkel, die zusammengenommen 180 Grad betragen, haben einerley Sinum.

§. 8.

Es sey (Fig. 110.) der Bogen TN ein Quadrant, und folglich der Winkel TCN = 90°, so ist die senkrechte Linie NC der Sinus dieses Bogens und Winkels. NC aber ist ein Radius, folglich ist klar, daß der Sinus eines rechten Winkels, oder eines Bogens von 90 Graden dem Halbmesser des Cirkels gleich ist. Und weil der Radius die größte halbe Chorde ist, und daher auch

der

der Sinus eines Bogens von 90 Graden der größte Sinus seyn muß, so hat man denselben zum Maasstabe der übrigen angenommen, und den **Sinus Totus** genannt. Man zeigt denselben entweder durch den Buchstaben R, oder durch die Abbreviatur Sin. Tot. an.

§. 9.

Wenn man, wie vorhin, aus den Endpuncten eines Bogens, z. E. des Bogens AN (Fig. 109.) Halbmesser ziehet; an das Ende des einen Halbmessers AC eine senkrechte Linie errichtet, und den andern Halbmesser NC verlängert, bis er dieselbe schneidet, so wird die dadurch bestimmte senkrechte Linie TA die **Tangente**, und der verlängerte Radius TC, welcher die Tangente schneidet, die **Secante** des Bogens NA oder des Winkels o genannt. Das Zeichen der Tangenten ist T. oder Tang. und der Secanten Sec. Derjenige Theil des Halbmessers, der zwischen dem Tangenten und Sinus enthalten ist, nemlich AP, heißt der **Quersinus** (sinus versus) von eben diesem Bogen und Winkel.

§. 10.

Wollte man also die Tangente und Secante eines Bogens von 90° z. E. des Bogens TN (Fig. 110.) beschreiben, so müßte man, vermöge der vorigen Definition, an den Punct T eine senkrechte Linie errichten und den Halbmesser NC verlängern, bis diese senkrechte Linie dadurch geschnitten würde. Weil aber der Winkel TCN in diesem Falle, indem er durch den Bogen TN gemessen wird, ein rechter Winkel ist, und folglich NC auf TC senkrecht stehet, so müssen die Linien PT und NC unter sich

parallel seyn (§. 63. Geom.) Es läßt sich also für einen Bogen oder Winkel von 90 Graden weder eine Tangente noch eine Secante bestimmen, oder in der Sprache der Mathematiker zu reden, die Tangente und Secante eines Bogens von 90 Graden ist unendlich groß.

§. 11.

Denjenigen Theil, welchen man zu einem Bogen, der noch nicht 90 Grad beträgt, hinzusetzen muß, damit 90 Grad voll werden, nennt man das **Complement** oder die **Ergänzung** desselben Bogens, und auf eben die Art heißt ein spitziger Winkel, den man zu einem andern spitzigen Winkel setzen muß, um einen rechten Winkel zu erhalten, der **Complements-** oder **Ergänzungs-Winkel** von diesem (angulus complementi). Wenn also NC (Fig. 110.) senkrecht auf TC stehet, so ist der Bogen QN das Complement von dem Bogen TQ, und umgewendet TQ das Complement von QN; ingleichen e der Complements-Winkel von o, und o wieder der Complements-Winkel von e. Will man also den Complements-Winkel von einem gegebenen Winkel haben, so darf man ihn nur von 90 Grad abziehen. Wäre also von einem Winkel von 40° die Rede, so würde sein Complements-Winkel 90° — 40° d. i. 50 Grad seyn. In einem rechtwinklichten Triangel sind daher die beyden spitzigen Winkel, weil sie zusammen 90 ausmachen, Complements-Winkel von einander.

§. 12.

Der Sinus eines Complements-Winkels und also auch der Sinus eines Complements-Bogens

wird der Kürze halber **Cosinus**; die Tangente eines Complements-Winkels oder Bogens **Cotangente**, und die Secante eines Complements-Winkels oder Bogens **Cosecante** genannt. Die Cosinus deutet man durch cos. die Cotangenten durch cot. und die Cosecanten durch cosec. an.

§. 13.

Wenn o (Fig. 110.) der Complements-Winkel von e ist, so muß der Sinus des Winkels o, nemlich QS, der Cosinus von e, und der Sinus des Winkels e, nemlich QR, der Cosinus des Winkels o seyn. Weil aber die vierseitige Figur CRQS, vermöge der Construction, ein Parallelogram ist, folglich

$$\left.\begin{array}{l} QS = RC \\ QR = SC \end{array}\right\} \text{(§. 93. Geom.)}$$

so kann man auch RC für den Sinum des Winkels o, oder für den Cosinum des Winkels e, und SC für den Sinum des Winkels e, oder für den Cosinum des Winkels o halten. Hieraus läßt sich also folgender Satz einsehen: **Der Cosinus ist derjenige Theil des Halbmessers, der sich zwischen dem Sinus und dem Mittelpuncte befindet.**

§. 14.

Lehrsatz. **Die Sinus, ingleichen die Tangenten und Secanten solcher Bogen, die aus der Spitze eines Winkels innerhalb seiner Schenkel beschrieben werden, haben gegen die Halbmesser dieser Bogen einerley Verhältnis.**

Es sey (Fig. III. Tab. 12.) aus der Spitze des Winkels ARB der Bogen SD mit dem Halbmesser DR = SR und der Bogen CB mit dem Halbmesser BR = CR beschrieben, so verhält sich

Sin. SD : SR = Sin. CB = CR
ferner Tang. SD : DR = Tang. CB = BR
und Sec. SD : DR = Sec. CB = BR

Beweis.

Man ziehe aus dem Puncte S die gerade Linie SQ senkrecht auf den Halbmesser DR und aus dem Puncte C die Linie CD senkrecht auf den Halbmesser BR, so ist

SQ = Sin. SD
CD = Sin. CB
(§. 5.)

Weil nun also, vermöge der Construction, sowohl der Winkel SQR, als auch der Winkel CDR ein rechter Winkel, und der Winkel bey R den beyden Triangeln SQR und CDR gemein ist, so müssen die beyden Triangel einander ähnlich seyn. Folglich

SQ : SR = CD : CR (§. 145. Geom.)
SQ = Sin. SD und CD = Sin. CB

Sin. SD : SR = Sin. CB : CR (§. 9. Ar.)

Auf eben die Art läßt sich auch beweisen, daß die Tangenten, ingleichen die Secanten dieser Bogen gegen ihre Halbmesser einerley Verhältnis haben. Denn man ziehe CD senkrecht auf den Endpunct des Halbmessers DR und AB senkrecht auf den Endpunct des Halbmessers BR, so ist

CD = Tang. SD
AB = Tang. CB
CR = Sec. SD
AR = Sec. CB
(§. 9.)

Weil

Weil nun in den Triangeln CDR und ABR ebenfalls zwey Winkel von einerley Grösse vorkommen, so müssen auch diese beyden Triangel einander ähnlich seyn, und daher erstlich

CD : DR = AB : BR (§. 145. Geom.)
CD = Tang. SD und AB = Tang. CB

Tang. SD : DR = Tang. CB : BR

ingleichen

CR : DR = AR : BR (§. 145. Geom.)
CR = Sec. SD und AR = Sec. CB

Sec. SD : DR = Sec. CB : BR (§. 9. Ar.)

§. 15.

Wenn man also einen jeden Halbmesser, er mag groß oder klein seyn, in gleich viel Theile theilet, so müssen auch die Sinus, ingleichen die Secanten und Tangenten, die zu einerley Winkel gehören, man mag sich nun dieselben im Kleinen oder im Grossen vorstellen, eine gleiche Anzahl von diesen Theilen erhalten. Man hat daher den Halbmesser in den gewöhnlichen Tafeln in 10000000 und in den grössern in 10000000000 eingetheilet, und durch mühsame Rechnungen untersuchet, wie viel solcher Theile auf die Sinus, Tangenten und Secanten der spitzigen Winkel gehen, weil die stumpfen Winkel eben die Sinus, Tangenten und Secanten haben, als die spitzigen, die mit ihnen 180 Grad ausmachen. Damit auch Anfänger die Möglichkeit einsehen, wie dergleichen Tafeln haben berechnet werden können, so wollen wir erst noch folgende Betrachtungen anstellen, ehe wir zu den übrigen Sätzen der Trigonometrie fortgehen.

§. 16.

Es ſey (Fig. 112.) die Linie BF die Seite eines regulären Sechsecks, und folglich ſo groß, als der Radius BN, (§. 116. Geom.) ſo muß der Bogen BDF, wovon BF eine Sehne iſt, den ſechsten Theil der Peripherie, d. i. 60 Grad betragen. Man ziehe aus dem Mittelpuncte N die ſenkrechte Linie ND, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} BC = \frac{1}{2} BF \\ \text{Bog. } BD = \frac{1}{2} \text{ Bog. } BDF \end{array}\right) \text{(§. 11. Geom.)}$$

Da nun BC der Sinus des Bogens BD (§. 5.) d. h. eines Bogens von 30 Grad iſt, ſo läßt ſich derſelbe finden, wenn man den Halbmeſſer halbirt. Gäbe man alſo dem Halbmeſſer 100 Theile, ſo würde der Sinus eines Bogens oder Winkels von 30 Graden 50 Theile haben. In den gewöhnlichen Tafeln hat man dem Halbmeſſer 10000000 Theile zugeeignet, daher auch der Sinus eines Bogens von 30 Graden durch die Zahl 5000000 ausgedrückt wird. Iſt der Sinus eines Winkels bekannt, ſo läßt ſich ſein Coſinus finden, wenn man das Quadrat des Sinus von dem Quadrate des Halbmeſſers ſubtrahiret und aus dem Ueberreſte die Quadratwurzel ziehet. Denn in dem rechtwinklichten Triangel BNC iſt die Hypothenuſe BN der Halbmeſſer, der Cathetus BC der Sinus und der Cathetus NC der Coſinus des Bogens BD (§. 13.) folglich

$$BN^2 = NC^2 + BC^2 \text{ (§. 103. Geom.)}$$

$$BN^2 - BC^2 = NC^2 \text{ (§. 14. Ar.)}$$

$$\sqrt{(BN^2 - BC)} = NC$$

Hat man nun den Coſinus eines Winkels von 30 Grad

Grad berechnet, so hat man zugleich den Sinum eines Winkels von 60 Grad gefunden.

§. 17.

Wenn man CN (Fig. 112.) von ND wegnimmt, so bleibt CD übrig. CD aber ist der Quersinus des Bogens BD (§. 9.) NC sein Cosinus, wie schon vorhin bemerkt worden ist, und ND der Halbmesser. Man erhält also den Quersinum eines Bogens oder Winkels, wenn man desselben Cosinum von dem Halbmesser subtrahirt.

§. 18.

Aus dem Sinu und Quersinu eines Winkels läßt sich der Sinus eines andern Winkels finden, der halb so groß ist, wenn man das Quadrat des Sinus zu dem Quadrate des Quersinus addirt, aus dieser Summe die Quadratwurzel ziehet, und davon die Hälfte nimmt. Denn man ziehe (Fig. 112.) die Sehne BD, so muß die Hälfte davon der Sinus von der Hälfte des Bogens BD seyn. (§. 6.) Es ist aber

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \quad (\text{§. 103. Geom.})$$

$$BD = \sqrt{(BC^2 + CD^2)}$$

$$\tfrac{1}{2}\,BD = \tfrac{1}{2}\sqrt{(BC^2 + CD^2)}$$

Hieraus erhellt also, wie man den Sinum eines Winkels von 15 Grad berechnen könne, wenn man den Sinum eines Winkels von 30 Grad gefunden, und wie ferner aus dem Sinu eines Winkels von 15 Grad der Sinus eines Winkels von $7\frac{1}{2}$ Grad u. s. f. zu finden sey.

§. 19.

Es sey (Fig. 112.) der Halbmesser BN senkrecht auf dem Halbmesser SN, und also BS die Seite ei-

nes Quadrats, das sich in den Cirkel, wovon BN und SN Halbmesser sind, beschreiben läßt, so ist, wenn aus dem Mittelpuncte N die Linie NA senkrecht auf BS gezogen wird,

$$\left.\begin{array}{rcl} BG & = & \frac{1}{2} BS \\ \text{Bog. } BA & = & \frac{1}{2} \text{ Bog. } BAS \end{array}\right\} \text{(§. 111. Geom.)}$$

Da nun der ganze Bogen BAS 90° beträgt, so muß der halbe Bogen BA, dessen Sinus BG ist, 45° ausmachen. Nun ist

$$BS^2 = BN^2 + SN^2 \quad \text{(§. 103. Geom.)}$$

$$BN^2 = SN^2$$

$$BS^2 = 2\,BN^2$$

$$BS = \sqrt{2\,BN^2}$$

$$\frac{1}{2} BS = \frac{1}{2}\sqrt{2\,BN^2}$$

$$\frac{1}{2} BS = BG$$

$$BG = \frac{1}{2}\sqrt{2\,BN^2}$$

$$BG = \text{Sin. } 45°$$

$$\text{Sin. } 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2\,BN^2}$$

d. h. weil BN der Radius des Cirkels ist, man findet den Sinum eines Winkels von 45 Grad, wenn man das Quadrat des Halbmessers durch 2 multipliciret, aus diesem Producte die Quadratwurzel ziehet, und davon die Hälfte nimmt. Aus dem Sinu eines Winkels von 45 Graden findet man den Sinum eines Winkels von 22°, 30′, und aus diesen wieder den Sinum eines Winkels von 11°, 15′ u. s. f. wie aus dem vorhergehenden §. erhellet.

§. 20.

Diese Betrachtungen werden hinlänglich seyn, Anfängern einigermassen die Möglichkeit begreiflich

zu

zu machen, wie die Sinus der Winkel haben ausgerechnet werden können. Setzt man nun die Berechnung der Sinus und Cosinus voraus, so ist leicht einzusehen, wie sich auch die Tangenten und Secanten berechnen lassen. Denn es sey (Fig. 109.)

NP = Sin. o
PC = Cos. o
AC = NC = Sin. Tot.
TA = Tang. o
TC = Sec. o

so müssen die beyden Triangel NPC und TAC wegen des gemeinschaftlichen Winkels o und der rechten Winkel bey P und A einander ähnlich seyn, folglich

PC : NP = AC : TA (§. 145. Geom.)
d. i. Cos. o : Sin. o = Sin. Tot. : Tang. o

$$\text{Tang. o} = \frac{\text{Sin. o} \times \text{Sin. Tot.}}{\text{Cos. o}} \text{ (§. 112. Ar.)}$$

Ferner

NP : NC = TA : TC (§. 145. Geom.)
d. i. Sin. o : Sin. Tot. = Tang. o : Sec. o

$$\text{Sec. o} = \frac{\text{Tang. o} \times \text{Sin. Tot.}}{\text{Sin. o}}$$

Man findet also die Tangente eines Winkels, wenn man seinen Sinum durch den Sinum Totum, d. h. durch den Halbmesser multipliciret, und dieses Product durch seinen Cosinum dividiret. Hat man die Tangente berechnet, so findet man die Secante, wenn man die Tangente durch den Halbmesser multiplicirt, und das Product durch den Sinum dividirt.

§. 21.

Wenn man sich nun der gewöhnlichen Tafeln, in welchen nicht nur die Sinus, Tangenten und Se-

canten, sondern auch ihre Logarithmen enthalten sind, bedienen will, so muß man noch folgendes merken: Es sind allemal 2 Winkel, die zusammen 90 Grad ausmachen, in einer Reihe einander gegenüber gesetzt worden. Verlangt man nun den Cosinum, Cotangenten oder Cosecanten eines Winkels, so suche man diesen Winkel auf, und nehme den Sinum, Tangenten oder Secanten des andern Winkels, der mit diesem sich in einer Reihe befindet. Z. E. wollte man den Cosinum von 24°, 30′ aus den Vlacqschen Tabellen haben, so dürfte man nur diesen Winkel aufsuchen, und den Sinum des Winkels auf der andern Seite in eben der Zeile nehmen, wo 65°, 30′, d. i. der Complements-Winkel von 24°, 30′ stehet. Weil die stumpfen Winkel einerley Sinus, Tangenten und Secanten mit den spitzigen haben, die mit ihnen zusammen 180 Grad ausmachen, so hat man die stumpfen Winkel weggelassen. Verlangt man also den Sinum eines solchen Winkels, so subtrahire man denselben von 180°, und suche von dem Ueberreste den Sinum. So würde also der Sinus von 120° eben so viel betragen, als der Sinus von 60°, weil 180° — 120° = 60°. Auf eben die Art erhält man auch die Tangenten und Secanten der stumpfen Winkel. Uebrigens ist in Ansehung der verschiedenen Ausgaben der Sinus-Tabellen zu merken, daß diejenige für die beste gehalten wird, welche Gardiner zu London 1742 in 4. herausgegeben hat, und worinnen man zugleich die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 102100 antrift. Weil sich diese Tabellen aber schon sehr selten gemacht haben, und daher sehr theuer bezahlt werden müssen, so hat ein gelehrter Jesuite zu Avignon

1770 eine neue Auflage davon besorgt, und die englische Anleitung zum Gebrauch der Tabellen, die sich bey der Londner Ausgabe befindet, in das französische übersetzt. Unter den kleinern Editionen ist die Vlacquische, welche zu Haag 1665 herausgekommen, die beste, weil sie die wenigsten Druckfehler enthält. Es ist aber in den grössern Tabellen, wie schon oben bemerkt worden ist, der Sinus Totus oder Halbmesser = 10000000000 angenommen worden, daher sein Logarithmus = 10.0000000000. In den kleinern Tafeln aber hat man denselben, und daher auch alle übrigen trigonometrischen Linien um 3 Zifern verkürzt, aber die Logarithmen behalten, daher es kömmt, daß alle Kennzifern der Logarithmen, die zu den Sinus und Tangenten gehören, um 3 Einheiten zu groß sind, weil sie eigentlich die Logarithmen solcher Zahlen sind, die 3 Zifern mehr enthalten. Dieser Umstand aber verursacht nicht den geringsten Fehler im Rechnen, weil man sich der Zahlen selbst, welche die Sinus und Tangenten ausdrükken, gar nicht bedient, wenn man einmal mit den Logarithmen rechnet.

§. 22.

Lehrsatz. In einem rechtwinklichten Triangel verhält sich die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, zu einer anliegenden Seite, wie der *Sinus Totus* zu dem Sinus des Winkels, welcher dieser Seite gegenüber steht, oder zu dem Cosinus des anliegenden Winkels.

Es sey ADB (Fig. 114. Tab. 12.) ein rechtwinklichter Triangel, so verhält sich

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B
oder AB : AD = Sin. Tot. : Cof. A

Ferner

AB : DB = Sin. Tot. : Sin. A
oder AB : DB = Sin. Tot. : Cof. B

Beweis.

Man beſchreibe mit der Seite AB, welche dem rechten Winkel gegenüber ſteht, einen Cirkel oder nur einen Cirkelbogen, ſo iſt, vermöge der Conſtruction und der angenommenen Bedingung, daß ADB ein rechter Winkel ſeyn ſoll,

AB = Sin. Tot. (§. 8.)
AD = Sin. B = Cof. A (§. 5. 11. 12.)

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B
AB : AD = Sin. Tot. : Cof. A) (§. 9. Ar.)

Auf eben die Art iſt auch klar, daß

AB : DB = Sin. Tot. : Sin. A
oder AB : DB = Sin. Tot. : Cof. B

weil DB als der Coſinus von B, auch der Sinus von A ſeyn muß. (§. 13.)

§. 23.

Weil in dem vorigen Triangel, wenn BA der Halbmeſſer oder Sinus Totus iſt,

DB = Cof. B (§. 13.)
AD = Sin. B

DB : AD = Cof. B : Sin. B (§. 9. Ar.)

d. h. in einem rechtwinklichten Triangel verhält ſich der eine Cathetus zu dem andern, wie der Coſinus des ſpizigen Winkels, welcher an

an dem ersten Catheto liegt, zu dem Sinu desselben Winkels.

§. 24.

Lehrsatz. In einem rechtwinklichten Triangel verhält sich der *Sinus Totus* zu der Tangente eines spitzigen Winkels, wie der Cathetus, der an diesem Winkel lieget, zu dem gegenüberstehenden Catheto.

Es sey in dem Triangel ADB (Fig. 114.) bey D ein rechter Winkel, so verhält sich

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD

Beweis.

Man beschreibe mit dem Catheto DB, an welchem der Winkel B lieget, einen Bogen, so ist, weil DB den Halbmesser vorstellt,

Sin. Tot. = DB (§. 8.)
Tang. B = AD (§. 9.)

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD

§. 25.

Weil B der Complements-Winkel von A ist, (§. 11.) so ist auch

Tang. B = Cot. A (§. 12.)

Sin. Tot. : Cot. A = DB : AD (§. 9. Ar.)

d. h. in einem rechtwinklichten Triangel verhält sich auch der *Sinus Totus* zu dem Cotangenten eines spitzigen Winkels, wie der gegenüberstehende Cathetus zu dem anliegenden.

§. 26.

§. 26.

Lehrsatz. In einem jeden geradelinichten Triangel verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Vergleicht man also die Seiten AM und PM (Fig. 113.) mit einander, so verhält sich

$$AM : MP = \text{Sin. } P : \text{Sin. } A$$

Beweis.

Weil sich durch jede drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ein Cirkel beschreiben läßt, (§. 90. Geom.) so ist klar, daß man um jeden geradelinichten Triangel einen Cirkel beschreiben kann. Stellt man sich nun einen Cirkel vor, dessen Peripherie durch die Ecken des Triangels AMP gehet, so müssen die Seiten desselben Sehnen des Cirkels, und die Winkel Peripherie-Winkel werden. Zieht man ferner aus dem Mittelpuncte C die senkrechten Linien CD und CR, so ist

$$\left.\begin{array}{rcl} AB &=& \frac{1}{2} AM \\ AD &=& \frac{1}{2} ADM \\ MG &=& \frac{1}{2} MP \\ MR &=& \frac{1}{2} MRP \end{array}\right\} \text{(§. 11. Geom.)}$$

Weil nun die Winkel P und A Peripherie-Winkel sind, und daher eben so viel Grade enthalten müssen, als die Hälften der Bogen, auf welchen sie stehen, so ist

$$\left.\begin{array}{rcl} P &=& \frac{1}{2} ADM = AD \\ A &=& \frac{1}{2} MRP = MR \end{array}\right) \text{(§. 83. Geom.)}$$

woraus ferner erhellet, daß der Sinus des Winkels P dem Sinus des Bogens AD, und der Sinus des Win-

Winkels A, dem Sinus des Bogens MR gleich seyn muß. Nun verhält sich aber

AM : MP = $\frac{1}{2}$ AM : $\frac{1}{2}$ MP (§. 103. Ar.)
AB = $\frac{1}{2}$ AM und MG = $\frac{1}{2}$ MP

AM : MP = AB : MG (§. 9. Ar.)
AB = Sin. AD und MG = Sin. MR (§. 6.)

AM : MP = Sin. AD : Sin. MR
Sin. AD = Sin. P und Sin. MR = Sin. A

AN : MP = Sin. P : Sin. A

Auf eben die Art läßt sich auch beweisen, daß die Seite AM zu der Seite AP sich verhält, wie der Sinus des Winkels P zu dem Sinu des Winkels M, und MP zu AP wie der Sinus des Winkels A zu dem Sinu des Winkels M.

§. 27.

Man kann den vorigen Satz auch so ausdrücken: Es verhält sich eine jede Seite zu dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels, wie eine andre Seite zu dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels. Denn aus der Proportion

AM : MP = Sin. P : Sin. A

folgt diese

AM : Sin. P = MP : Sin. A (§. 100. Ar.)

§. 28.

Lehrsatz. In einem jeden geradelinichten Triangel verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente von der halben Summe der beyden Winkel, welche diesen Seiten gegenüber stehen, zu der

Tan-

Tangente von dem halben Unterschiede eben dieser Winkel.

Es sey zum Beyspiele ANQ (Fig. 115.) ein geradelinichter Triangel, so verhält sich

$$AQ + AN : AQ - AN = T.\tfrac{1}{2}(ANQ + AQN) : T.\tfrac{1}{2}(ANQ - AQN)$$

Beweis.

Man trage die kleinste von den beyden Seiten, von welchen die Rede ist, nemlich AN auf die andere Seite AQ, mache also AR = AN, und verlängere AQ, bis BA ebenfalls so groß, als AN wird, so ist

$$BQ = AQ + BA = AQ + AN$$
$$KQ = AQ - AR = AQ - AN$$

Die Puncte N und R verbinde man durch eine gerade Linie, aus dem Puncte Q ziehe man eine Linie parallel mit der Linie NR, und durch die Puncte B und N ziehe man eine andre gerade Linie bis an die Parallellinie CQ, so muß der Winkel BNR, und folglich auch C ein rechter Winkel seyn. Denn weil, vermöge der Construction, BA = AN = AR, so könnte man mit dem Halbmesser BA aus dem Puncte A einen Cirkel beschreiben, welcher durch die Puncte B, N und R gienge. Alsdenn würde BR der Diameter des Cirkels, und BNR ein Winkel an der Peripherie werden, der auf dem Endpuncte eines Diameters stünde, woraus also erhellet, daß der Winkel BNR ein rechter Winkel ist (§. 84. Geom.) und weil CQ parallel mit NR gezogen worden, so muß C so groß als < BNR, folglich auch ein rechter Winkel (§. 65. Geom.) und daher die Triangel BCQ

BCQ und NCQ rechtwinklichte Triangel seyn. Weil nun ferner, vermöge der Construction, AN = AR, so sind die Winkel ANR und ARN einander gleich, (§. 74. Geom.) und daher ANR + ARN = 2 ARN. Es ist aber

ANR + ARN = 180° — NAR (§. 70. Geom.)

2 ARN = 180° — NAR (§. 11. Ar.)

ANQ + AQN = 180 — NAR (§. 70. Geom.)

2 ARN = ANQ + AQN (§. 11. Ar.)

$\frac{2\,ARN}{2} = \frac{ANQ + AQN}{2}$ (§. 18. Ar.)

d. i. $ARN = \frac{1}{2}(ANQ + AQN)$

BQC = ARN (§. 65. Geom.)

$BQC = \frac{1}{2}(ANQ + AQN$ (§. 11. Ar.)

oder $BQC = \frac{1}{2}ANQ + \frac{1}{2}AQN$

AQN = AQN

$BQC - AQN = \frac{1}{2}ANQ + \frac{1}{2}AQN - AQN$ (§. 14. Ar.)

d. i. $BQC - AQN = \frac{1}{2}ANQ - \frac{1}{2}AQN$ (§. 30. Ar.)

oder $BQC - AQN = \frac{1}{2}(ANQ - AQN)$

BQC — AQN = NQC

$NQC = \frac{1}{2}(ANQ - AQN)$ (§. 11. Ar.)

Weil also der Winkel BQC so groß ist, als $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) so ist auch die Tangente von BQC so groß, als die Tangente von $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) und weil $NQC = \frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) so muß auch die Tangente von NQC der Tangente von $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN gleich seyn. Nun verhält sich in dem rechtwinklichten Triangel BCQ

CQ : BC = Sin. Tot. : Tang. BQC (§. 24.)

CQ : Sin. Tot. = BC : Tang. BQC (§. 100. Ar.)

und in dem rechtwinklichten Triangel NCQ

CQ : NC = Sin. Tot. : Tang. NQC (§. 24.)

CQ : Sin. Tot. = NC : Tang. NQC (§. 100. Ar.)

BC : Tang. BQC = NC : Tang. NQC (§. 11. Ar.)

BC : NC = Tang. BQC : Tang. NQC (§. 100. Ar.)

BQ : RQ = BC : NC (§. 143. Geom.)

BQ : RQ = Tang. BQC : Tang. NQC (§. 11.)

T. $\frac{1}{2}$(ANQ + AQN) = T. BQC und T. $\frac{1}{2}$(ANQ — AQN = T. NQC

BQ : RQ = T. $\frac{1}{2}$(ANQ + AQN) : T. $\frac{1}{2}$(ANQ — AQN (§. 9. Ar.)

BQ = AQ + AN und RQ = AQ — AN

AQ + AN : AQ — AN = T. $\frac{1}{2}$ (ANQ + AQN) : T. $\frac{1}{2}$ (ANQ — AQN) (§. 9. Ar.)

§. 29.

Lehrsatz. **Wenn man in einem ungleichseitigen Triangel mit der kleinsten Seite aus der Spitze desjenigen Winkels, welcher der größten Seite gegenüber stehet, einen Cirkel beschreibt, so verhält sich die größte Seite zu der Summe der übrigen beyden Seiten, wie der Unterschied dieser beyden Seiten zu demjenigen Theile der größten Seite, welcher sich ausserhalb des Cirkels befindet.**

Es sey mit der kleinsten Seite CP des Triangels QCP (Fig. 116.) aus der Spitze C, welcher der

der größten Seite QP gegenüber stehet, ein Cirkel beschrieben, so verhält sich

$$QP : QC + CP = QC - CP : QS$$

Beweis.

Man verlängere die Seite QC bis an die Peripherie, so ist, weil $CP = CN = CD$. (§. 29. Geom.)

$$QN = QC + CN = QC + CP$$
$$QD = QC - CD = QC - CP$$

Es verhält sich aber

$$QP : QN = QD : QS \text{ (§. 156. Geom.)}$$

$$QP : QC + CN = QC - CD : QS \text{ (§. 9. Ar.)}$$

Zweytes Capitel.

Von der Ausrechnung der Triangel.

§. 30.

Bey der Berechnung der Triangel, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen, kömmt alles darauf an, daß man sich aus den jetzt erklärten Lehrsätzen denjenigen erwählt, durch welchen man aus den bekannt gemachten Theilen eines Triangels eine Proportion mit drey bekannten Gliedern erhält, damit man alsdenn die unbekannte Grösse, die sich allemal durch Versetzung der Glieder zum vierten Gliede machen läßt, durch Hülfe der Regel Detri oder der Logarithmen finden kann. Es versteht sich aber von selbst, daß man zu dergleichen Rechnungen allemal so viel von einem Triangel wissen muß, als zu

der Bestimmung desselben nöthig ist; nemlich entweder eine Seite und zwey Winkel, oder zwey Seiten und einen Winkel, oder alle Seiten. Um die Weitläuftigkeit zu vermeiden, und unsre jungen Leser mit den Logarithmen desto bekannter zu machen, so wollen wir alles durch Hülfe der Logarithmen berechnen.

Berechnung der rechtwinklichten Triangel.

§. 31.

Aufgabe. Es wird in einem rechtwinklichten Triangel ein Catherus und der anliegende spitzige Winkel gegeben, man soll daraus das übrige finden.

Auflösung.

Es sey z. B. in dem rechtwinklichten Triangel ADB (Fig. 114.) die Seite DB und der Winkel B gegeben, so findet man erstlich den Winkel A, wenn man B von 90 Grad subtrahirt, (§. 11.) und die Seite AB, wenn man also schließt:

Cos. B : Sin. Tot. = DB : AB (§. 22.)

$$AB = \frac{\text{Sin. Tot.} \times DB}{\text{Cos. B}} \quad (\S.\ 112.\ \text{Ar.})$$

log. AB = log. Sin. Tot. + log. DB — log. Cos. B (§. 125. Ar.)

Die Seite AD wird gefunden, wenn man entweder schließt:

Cos. B : Sin. B = DB : AD (§. 23.)

$$AD = \frac{\text{Sin. B} \times DB}{\text{Cos. B}} \quad (\S.\ 112.\ \text{Ar.})$$

log. AD = log. Sin. B + log. DB — log. Cos. B (§. 125. Ar.)

oder

oder

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD (§. 24.)

$$AD = \frac{\text{Tang. B} \times \text{DB}}{\text{Sin. Tot.}}$$

log. AD = log. Tang. B + log. DB — log. Sin. Tot.

Exempel.

Es sey die Seite DB = 25 Ruthen
und der Winkel B = 50° 20′

so ist der Winkel A = 90° — 50°, 20′ = 39°, 40′

$$\text{die Seite AB} = \frac{\text{Sin. Tot.} \times 25}{\text{Cos. } 50°, 20'}$$

log. AB = log. Sin. Tot. + log. 25 — log. Cos. 50°, 20′

Es ist aber vermöge der Tabellen

log. Sin. Tot. *	=	10. 0000000
log. 25	=	1. 3979400 add.
		11. 3979400
log. Cos. 50°, 20′	=	9. 8050385 subtr.
log. AB	=	1. 5929015

Sucht man nun diesen Logarithmum unter den Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen auf, so findet man ihn nicht völlig, sondern nur ein Paar andere, zwischen welche er fällt. Nemlich der nächst kleinere ist

1. 5910646 = log. 39

und der nächst grössere

1. 6020600 = log. 40

Der gefundene Logarithmus 1. 5929015 muß also zu einer Zahl gehören, die grösser als 39 und kleiner

* Man erinnere sich, daß der Sinus Totus der Sinus eines Winkels von 90 Graden ist. In den Tabellen findet man ihn, wenn man den Sinum von 89 Gr. 60 Minuten sucht.

als 40 ist, und daher muß die Seite AB ausser 39 Ruthen noch einige Schuh oder Zolle enthalten. Wollte man also diese noch wissen, so dürfte man nur den gefundenen Logarithmum, weil seine Kennzifer nur 1 ist, unter einer grössern, z. E. unter der Kennzifer 3 aufsuchen. Es ist aber der nächst kleinere unter dieser Kennzifer

3. 5928427 = log. 3916

und der nächst grössere

3. 5929536 = log. 3917

Wenn man nun aus der Kennzifer dieser beyden Logarithmen 2 Einheiten wegnimmt, um sie dem gefundenen gleicher zu machen, so müssen bey den darzu gehörigen Zahlen 2 Zifern rechter Hand Decimal-Brüche werden. Folglich

1. 5928427 = log. 39, 16
1. 5929536 = log. 39, 17) (§. 133. Ar.)

Weil nun der gefundene Logarithmus zwischen diese beyde Logarithmen fällt, so muß auch die dazu gehörige Zahl zwischen die Zahlen 39, 16 und 39, 17 fallen, d. h. die Seite AB muß grösser seyn, als $39\frac{16}{100}$ Ruthen, d. i. als 39 Ruthen, 1 Schuh und 6 Zoll, aber kleiner als $39\frac{17}{100}$ Ruthen, d. i. kleiner als 39 Ruthen 1 Schuh und 7 Zoll. Wollte man nun auch damit noch nicht zufrieden seyn, daß man die Schuh und Zolle gefunden, welche die Seite AB ausser den 39 Ruthen enthält, so müßte man, weil sich der Logarithmus in den kleinen Tabellen, die wir hier nur voraus setzen können, unter keiner grössern Kennzifer mehr aufsuchen läßt, den Satz anwenden, daß sich der Unterschied der Zahlen beynahe wie der Unterschied der Logarithmen verhält. (§. 134. Ar.) Dieses könnte hier auf folgende Art geschehen:

1.

I. 5929536	= log. 39°, 1′, 7″		
I. 5928427	= log. 39°, 1′, 6″		
Unterschied = 1109		Unterschied 1″ = 10‴	
I. 5929015	= log. AB		
I. 5928427	= log. 39°, 1′, 6″		
Unterschied = 588		Unterschied = x	

1109 : 588 = 10‴ : x

10

1109) 5880 | 5‴ $\frac{335}{1109}$ = x

5545

335

Setzt man diesen Unterschied zu 39°, 1′ 6″, so erhält man die eigentliche Grösse der Seite AB, welche nemlich 39 Ruthen, 1 Schuh, 6 Zoll und $5\frac{335}{1109}$ Linien beträgt. Diese grosse Genauigkeit aber wird selten verlangt, indem man sich gemeiniglich an Schuhen und Zollen begnügen läßt. Anfänger sollen nur aus diesem Beyspiel sehen, wie man sich der bisher erklärten Sätze in den Fällen bedienen muß, wo man auch die kleinsten Theile angeben soll.

Nun haben wir noch AD zu berechnen. Es war aber nach der ersten Proportion

log. AD = log. Sin. B + log. DB — log. Cos. B

d. i. = log. Sin. 50°, 20′ + log. 25 — log. Cos. 50°, 20′

Vermöge der Tabellen ist

log. Sin. 50°, 20′	= 9. 8863616	
log. 25	= 1. 3979400	add.
	11. 2843016	
log. Cos. 50°, 20′	= 9. 8050385	subtr.
log. AD	= 1. 4792631	

welchem der Logarithmus der Zahl 30 am nächsten

kömmt. Sucht man ihn wieder unter der Kennziser 3, so findet man die Zahl 3014, woraus sich also ergiebt, daß die Seite AD 30 Ruthen, 1 Schuh und 4 Zoll beträgt. Eben diese Zahl würde man erhalten, wenn man sich der andern Proportion bediente, nemlich

Sin. Tot. : Tang. B = DB : AD (§. 24.)

log. AD = log. Tang. B + log. DB — log. Sin. Tot.

log. Tang. B	= log. T. 50°, 20′	=	10. 0813231
log. DB	= log. 25	=	1. 3979400
			11. 4792631
	log. Sin. Tot.	=	10. 0000000
	log. AD	=	1. 4792631

welcher Logarithmus mit dem vorigen völlig einerley ist.

§. 32.

Wäre ausser der Seite DB nicht, wie in der vorigen Aufgabe, der anliegende Winkel B, sondern der gegenüberstehende A gegeben, so würden die Proportionen, die man zu der Rechnung nöthig hätte, folgende seyn:

Sin. A : Sin. Tot. = DB : AB (§. 22.)
Sin. A : Cos. A = DB : AD (§. 23.)

oder

Sin. Tot. : Cot. A = DB : AD (§. 25.)

Diese Proportionen aber sind von den vorigen nicht verschieden, weil die Winkel A und B Complements-Winkel sind, und also

Sin. A = Cos. B
Sin. B = Cos. A
Cot. A = Tang. B

§. 33.

§. 33.

Eine Höhe also, wie AM (Fig. 84. Tab. 9.) mit welcher man sich auf einerley Ebene befindet, und zu deren untersten Endpuncte man in gerader Linie gehen kann, läßt sich trigonometrisch finden, wenn man die Standlinie CM nebst dem Winkel C mißt, und entweder also schließt

Cos. C : Sin. C = MC : AM

oder

Sin. Tot. : Tang. C = MC : AM

§. 34.

Aufgabe. Es wird die Hypothenuse und ein spiziger Winkel gegeben, man soll das übrige finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) die Seite AB = 3916″
der Winkel A = 39°, 40′
so ist der Winkel B, als der Complements-Winkel von A = 90° — 39°, 40′, d. i. 50°, 20′

Sin. Tot. : Sin. A = AB : DB (§. 22.)
d. i. Sin. Tot. : Sin. 39°, 40′ = 3916″ : DB

log. DB = log. Sin. 39°, 40′ + log. 3916″ — log. Sin. Tot.

log. Sin. 39°, 40′ = 9. 8050385
log. 3916 = 3. 5928427 add.
13. 3978812
log. Sin. Tot. = 10. 0000000 subtr.
log. DB = 3. 3978812

Diesem Logarithmo kömmt in den Tabellen der Logarithmus der Zahl 2500 am nächsten, daher die gesuchte Seite DB 2500 Zoll oder 25 Ruthen enthal-

ten muß. Daß aber die Zahl 2500 hier Zoll bedeutet, erkennt man aus der vorigen Proportion, in welcher AB durch Zoll ausgedrückt wird, daher auch die Zahl, welche man für DB findet, nichts anders als Zolle bedeuten kann.

Auf eine ähnliche Art wird der andre Cathetus AD gefunden. Denn

Sin. Tot. : Cos. A = AB : AD (§. 22.)
d. i. Sin. Tot. : Cos. 39°, 40′ = 3916″ : AD

log. AD = log. Cos. 39°, 40′ + log. 3916″ — log. Sin. Tot.

log. Cos. 39°, 40′ = 9. 8863616
log. 3916 = 3. 5928427
13. 4792043
log. Sin. Tot. = 10. 0000000
log. AD = 3. 4792043

Diesem Logarithmo kömmt in den Tabellen der Logarithmus von 3014 ziemlich nahe. Folglich beträgt die Seite AD so viel als 3014 Zoll, d. i. 30 Ruthen, 1 Schuh, 4 Zoll.

§. 35.

Aufgabe. Es wird die Hypothenuse und ein Catherus gegeben, man soll daraus die spitzigen Winkel und die dritte Seite finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) AB = 3916″
AD = 3014″
so läßt sich der Winkel B folgendergestalt finden:

AB

AB : AD = Sin. Tot. : Sin. B (§. 22.)
d. i. 3916″ : 3014″ = Sin. Tot. : Sin. B

log. Sin. B = log. 3014 + log. Sin. Tot. — log. 3916

log. 3014	=	3. 4791432
log. Sin. T.	=	10. 0000000
		13. 4791432
log. 3916	=	3. 5928427
log. Sin. B	=	9. 8863005

Sucht man nun dieſen Logarithmum unter den Logarithmen der Sinus, ſo findet man einen, der ihm ziemlich nahe kömmt, nemlich log. Sin. 50° 20′ = 9. 8863616, woraus alſo erhellt, daß der geſuchte Winkel B 50° 20′, und folglich der Winkel A 39°, 40′ beträgt. Wäre nicht von einem rechtwinklichten Triangel die Rede, ſo würde dieſer Schluß: der gefundne Sinus von dem Winkel *B* iſt der Sinus eines Winkels von 50°, 20′, folglich iſt *B* ſelbſt ein Winkel von 50°, 20′, nicht richtig ſeyn, weil ein ſtumpfer Winkel von 129°, 40′ eben denſelben Sinum hat. (§. 7.) Man muß daher in dergleichen Fällen eigentlich ſo ſchlieſſen: entweder der ſpitzige Winkel ſelbſt, der bey dem gefundnen Sinus ſtehet, oder ein ſtumpfer Winkel, der mit ihm 180 ausmacht, iſt der geſuchte. Welches von beyden nun wahr ſey, müſſen die Umſtände lehren. In einem rechtwinklichten Triangel iſt kein ſtumpfer Winkel möglich, daher wir den ſpitzigen genommen haben, der bey dem gefundnen Sinus in den Tafeln ſtehet.

Durch Hülfe des Winkels B läßt ſich nunmehr auch die Seite DB beſtimmen. Denn

Sin.

Sin. Tot. : Cos. B = AB : DB (§. 22.)
d. i. Sin. Tot. : Cos. 50°, 20′ = 3916″ : DB

log. DB = log. Cos. 50°, 20′ + log. 3916 — log. Sin. Tot.

log. Cos. 50°, 20′ = 9. 8050385
log. 3916 = 3. 5928427
13. 3978812
log. Sin. Tot. = 10. 0000000
log. DB = 3. 3978812

welchem der Logarithmus von 2500 nahe kömmt, woraus also erhellt, daß die gesuchte Seite DB = 2500″ = 25°.

Durch Hülfe des Pythagorischen Lehrsatzes könnte man auch DB finden, ohne erst den Winkel B zu suchen, und ohne trigonometrische Tabellen zu gebrauchen. Denn

$AB^2 = AD^2 + DB^2$ (§. 103. Geom.)

$AB^2 - AD^2 = DB^2$

$\sqrt{(AB^2 - AD^2)} = DB$

d. h. die Seite DB wird gefunden, wenn man das Quadrat der Seite AD von dem Quadrate der Hypothenuse AB subtrahiret, und aus dem Ueberreste die Quadratwurzel ziehet.

§. 36.

Aufgabe. Aus den beyden gegebenen Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, die beyden spitzigen Winkel und die Hypothenuse zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 114.) die Seite AD = 3014″
die Seite DB = 2500″

so

so braucht man zur Berechnung des Winkels B folgende Proportion

DB : AD = Sin. Tot. : Tang. B (§. 24.)
d. i. 2500 : 3014 = Sin. Tot. : Tang. B

log. Tang. B = log. 3014 + log. Sin. Tot. — log. 2500

log. 3014 = 3. 4791432
log. Sin. Tot. = 10. 0000000
13. 4791432
log. 2500 = 3. 3979400
log. Tang. B = 10. 0812032

Sucht man nun diesen Logarithmum unter den Logarithmen der Tangenten, so findet man folgenden, der ihm sehr nahe kömmt,

log. Tang. 50°, 20′ = 10. 0813231

man kann also hieraus schliessen, daß der Winkel B = 50°, 20′ weil ein stumpfer Winkel hier unmöglich ist.

Der andre Winkel A also ist = 90° — 50°, 20′,
d. i. 39°, 40′.

Die Hypothenuse AB läßt sich nunmehr finden, wenn man schließt:

Sin. B : Sin. Tot. = AD : AB (§. 22.)
d. i. Sin. 50°, 20′ : Sin. Tot. = 3014 : AB

log. AB = log. Sin. Tot. + log. 3014 — log. Sin. 50°, 20′

log. Sin. Tot. = 10. 0000000
log. 3014 = 3. 4791432
13. 4791432
log. Sin. 50°, 20′ = 9. 8863616
log. AB = 3. 5927816

welchem der Logarithmus der Zahl 3916 sehr nahe kömmt,

kömmt, daher die Hypothenuse = 3916″ = 39°, 1′, 6″.

Durch den Pythagorischen Lehrsatz würde man die Hypothenuse ebenfalls finden können, ohne einen Winkel zu suchen. Denn

$$AD^2 + DB^2 = AB^2 \quad (\S.\ 103.\ \text{Geom.})$$

$$\sqrt{(AD^2 + DB^2)} = AB$$

Berechnung der schiefwinklichten Triangel.

§. 37.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite das übrige zu finden.

Auflösung.

Es sey in dem Triangel QCP (Fig. 116.)

der Winkel Q = 32°
der Winkel P = 43°
die Seite QP = 156 Ruthen

so findet man erstlich den dritten Winkel QCP, wenn man die Summe der beyden gegebenen von 180 Grad abzieht. (§. 70. Geom.) Folglich

$\sphericalangle$ QCP = 180° — (32° + 43°) = 180° — 75° = 105°

Die Seite QC erhält man durch folgende Proportion:

$$\text{Sin. QCP} : \text{QP} = \text{Sin. P} : \text{QC} \quad (\S.\ 26.\ 27.)$$

$$\text{QC} = \frac{\text{QP} \times \text{Sin. P}}{\text{Sin. QCP}}$$

l. QC = log. QP + log. Sin. P — log. Sin. QCP
d. i. l. QC = log. 156 + log. Sin. 43° — log. Sin. 105°

log.

log. 156 = 2. 1931246
log. Sin. 43° = 9. 8337833
12. 0269079
log. Sin. 105° = log. Sin. 75° = 9. 9849438
log. QC = 2. 0419641

welchem der Logarithmus von 110 am nächsten kömmt. Unter der Kennzifer 3 ist der Logarithmus von 1101 der nächste. Nimmt man nun diesen letztern, so beträgt Q 110, 1 Ruthen, d. i. 110 Ruthen, 1 Schuh.

Auf eben die Art wird auch die dritte Seite CP berechnet. Denn

Sin. QCP : QP = Sin. Q : CP (§. 27.)
d. i. Sin. 105° : 156 = Sin. 32° : CP

log. CP = log. 156 + log. Sin. 32° — log. Sin. 105°

log. 156 = 2. 1931246
log. Sin. 32° = 9. 7242097
11. 9173343
log. Sin. 105° = log. Sin. 75° = 9. 9849438
log. CP = 1. 9323905

Dieser Logarithmus ist grösser, als der Logarithmus der Zahl 85, und kleiner als der Logarithmus der Zahl 86. Unter der Kennzifer 3 kömmt ihm der Logarithmus von 8558 sehr nahe; nimmt man nun 2 Einheiten von der Kennzifer 3 weg, so werden in der Zahl 8558 zwey Zifern Decimalbrüche; Folglich enthält die Seite CP 85, 58 Ruthen, d. i. 85 Ruthen, 5 Schuh, 8 Zoll.

§. 38.

Durch Hülfe dieser Aufgabe läßt sich also die Entfernung zweyer Oerter, zu deren einem man nur kommen kann, trigonometrisch finden. Denn es

stelle

stelle die Linie AB (Fig. 81. Tab. 7.) eine solche Entfernung vor; so findet man dieselbe, wenn man die Standlinie AN nebst den Winkeln x und A mißt, die Summe dieser beyden Winkel von 180° subtrahirt, wodurch man den Winkel B erhält, und hierauf also schließt:

Sin. B : AN = Sin. x : AB

§. 39.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten und dem Winkel, welcher der größten Seite gegenüber steht, die übrigen beyden Winkel und die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey in dem Triangel QCP (Fig. 116.)

die Seite CP = 1711′
die Seite CQ = 2202′
der Winkel P = 43°

so suche man erstlich den Winkel Q durch folgende Proportion:

CQ : Sin. P = CP : Sin. Q (§. 26. 27.)
d. i. 2202′ : Sin. 43° = 1711′ : Sin. Q

log. Sin. Q = log. Sin. 43° + log. 1711′ — log. 2202

log. Sin. 43° = 9. 8337833
log. 1711′ = 3. 2332500
13. 0670333
log. 2202 = 3. 3428173
log. Sin. Q = 9. 7242160

Diesem Logarithmo kömmt unter den Logarithmen der Sinus folgender ziemlich nahe

9. 7242097 = log. Sin. 32°, 0′

Der

Der Winkel Q muß also entweder 32 Grad, oder 180° — 32°, d. i. 148° Grad betragen. Wollte man nun 148° annehmen, so müßte einem grössern Winkel die kleinere Seite, und dem kleinern Winkel die grössere Seite gegenüber stehen können, welches eine Unmöglichkeit ist. (§. 4.) Es ist also gewiß, daß Q ein Winkel von 32 Grad seyn muß, welches man auch daraus erkennen kann, weil sonst, wenn man dem Winkel Q 148 Grad geben wollte, die Summe der beyden Winkel Q + P = 148° + 43° = 191°, und folglich grösser als 180°, d. i. als die Summe aller drey Winkel seyn müßte. (§. 68. Geom.)

Der dritte Winkel QCP ist also
180° — (43° + 32°) = 180° — 75° = 105° (§. 70. Geom.)
Hieraus wird die Seite QP gefunden, wenn man schließt:

Sin. P : CQ = Sin. QCP : QP (§. 26. 27.)
d. i. Sin 43° : 2202′ = Sin. 105° : QP

log. QP = log. 2202 + log. Sin. 105° — log. Sin. 43° (§. 125. Ar.)

log. 2202	=	3. 3428173
log. Sin. 105° = log. Sin. 75°	=	9. 9849438
		13. 3277611
log. Sin. 43°	=	9. 8337833
log. QP	=	3. 4939778

welchem der Logarithmus der Zahl 3118 sehr nahe kömmt. Die Seite QP beträgt also 3118 Schuh, oder 311 Ruthen, 8 Schuh.

§. 40.

Wenn zwey Seiten nebst dem Winkel, welcher der kleinen Seite gegenüber steht, gegeben werden,

so läßt sich nicht allemal, wie vorhin, das übrige mit Gewißheit bestimmen. Denn es sey der Winkel, welcher der kleinern Seite CP gegenüber stehet, nemlich

$$Q = 32^\circ$$
$$CP = 1711$$
$$CQ = 2202$$

so würde man also schliessen, um den Winkel P zu finden

$$CP : \text{Sin. } Q = CQ : \text{Sin. } P$$
$$\text{d. i. } 1711 : \text{Sin. } 32^\circ = 2202 : \text{Sin. } P$$

$$\log. \text{Sin. } P = \log. \text{Sin. } 32^\circ + \log. 2202 - \log. 1711$$

$$\log. \text{Sin. } 32^\circ = 9.7242097$$
$$\log. \quad 2202 = 3.3428173$$
$$13.0670270$$

$$\log. \quad 1711 = 3.2332500$$
$$\log. \text{Sin. } P = 9.8337770$$

Diesem Logarithmo kömmt in den Sinus-Tabellen der Logarithmus 9. 8337833 ziemlich nahe, welcher zu dem Sinus eines Winkels von 43°, und folglich auch zu dem Sinus eines stumpfen Winkels von 180° — 43°, d. i. 137° gehöret. (§. 7.) Der gesuchte Winkel P muß also entweder 43° oder 137° enthalten. Weil er nun der grössern Seite gegenüber stehen soll, so muß er auch grösser seyn, als der gegebene Winkel Q, d. i. grösser als 32°. Es ist aber nicht nur 137°, sondern auch 43° grösser als 32°, folglich wäre hier sowohl ein spitziger als auch ein stumpfer Winkel möglich, welches man auch daraus sehen kann, weil die Summe von 32° + 137° noch nicht 180° ausmacht. Hieraus ist also klar, daß in dem Falle, wo zwey Seiten und ein anliegender Winkel gegeben werden, eine Zweydeutigkeit entste-

entstehen kann, wofern der gegebene Winkel der kleinern Seite gegenüber stehet.

§. 41.

Zu der folgenden Aufgabe brauchen wir einen arithmetischen Satz, welcher in der Arithmetik nicht erklärt worden ist, daher er jetzt als ein Lehnsatz vorgetragen und bewiesen werden soll. Der Satz selbst ist dieser:

Wenn man zu der halben Summe zweyer Grössen ihren halben Unterschied addirt, so erhält man die grössere, und wenn man den halben Unterschied von der halben Summe subtrahirt, so erhält man die kleinere von diesen beyden Grössen. Denn es heisse die kleinere von zwey Grössen k, der Unterschied u, und die Summe S, so ist die grössere $= k + u$, folglich

$$k + k + u = S$$

d. i. $$2k + u = S$$

$$\frac{2k + u = S}{2} \quad \frac{S}{2} \text{ (§. 18. Ar.)}$$

d. i. $$k + \tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}S$$

$$k = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}u \text{ (§. 14. Ar.)}$$

$$k + u = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}u + u \text{ (§. 13. Ar.)}$$

d. i. $$k + u = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}u$$

Weiß man also die Summe zweyer Winkel und ihren Unterschied, so kann man durch Hülfe dieses Satzes die Winkel selbst finden. Es sey z. E. die Summe zweyer Winkel $a + b = 120°$ und ihr Unterschied $a - b = 30°$, so ist der grössere Win-

kel a $= \frac{120°}{2} + \frac{30°}{2} = 60° + 15° = 75°$, der kleinere b $= \frac{120°}{2} - \frac{30°}{2} = 60° - 15° = 45°$, wovon man sich auch durch die Probe überzeugen kann, denn $75° + 45° = 120°$.

§. 42.

Aufgabe. Aus zwey gegebenen Seiten nebst dem Winkel, welchen diese Seiten einschliessen, die übrigen beyden Winkel und die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 115. Tab. 12.) in dem Trianget ANQ

die Seite AQ = 86′
die Seite AN = 39′
der Winkel NAQ = 64°

so suche man erst die halbe Summe der übrigen beyden Winkel ANQ und AQN. Es ist aber hier

$180° - 64° = ANQ + AQN$ (§. 70. Geom.)
d. i. $116° = ANQ = AQN$

$\frac{116°}{2} = 58° = \frac{1}{2}(ANQ + AQN)$ (§. 14. Ar.)

Hierauf schliesse man, um den halben Unterschied dieser beyden Winkel zu finden, folgendergestalt:

AQ

$AQ + AN : AQ - AN = T.\frac{1}{2}(ANQ + AQN) : T.\frac{1}{2}(ANQ - AQN)$ (§. 28.)

also $86' + 39' : 86' - 39' = \text{Tang. } 58° : \text{Tang. } \frac{1}{2}(ANQ - AQN)$

d. i. $125' : 47' = \text{Tang. } 58° : \text{Tang. } \frac{1}{2}(ANQ - AQN)$

$\log. \text{Tang. } \frac{1}{2}(ANQ - AQN) = \log. \text{Tang. } 58° + \log. 47 - \log. 125$

log. Tang. 58°, 0′	=	10.2042108
log. 47	=	1.6720979
		11.8763087
log. 125	=	2.0969100
log. Tang. $\frac{1}{2}(ANQ - AQN)$	=	9.7793987

Dieſen Logarithmum ſuche man unter den Logarithmen der Tangenten, ſo muß der Winkel, welcher dazu gehöret, der halbe Unterſchied der beyden Winkel ANQ und AQN ſeyn. Es kömmt ihm aber der logar. Tang. 31°, 2′ ſehr nahe, folglich iſt, weil der halbe Unterſchied zweyer Winkel eines geradelinichten Triangels kein ſtumpfer Winkel ſeyn kann,

$\frac{1}{2}(ANQ - AQN) = 31°, 2'$

$< ANQ = 58° + 31°, 2' = 89°, 2'$

$< AQN = 58° - 31°, 2' = 26°, 58'$) (§. 41.)

Nunmehr läßt ſich die Seite NQ durch die gewöhnliche Proportion berechnen.

Sin. ANQ : AQ = Sin. NAQ : NQ (§. 27.)

d. i. Sin. 89°, 2′ : 86′ = Sin. 64° : NQ

---

log. NQ = log. Sin. 64° + log. 86 — log. Sin. 89°, 2′

log. Sin. 64° 0′ = 9. 9536602
log. 86 = 1. 9344984

11. 8881586
log. Sin. 89°, 2′ = 9. 9999382

log. NQ = 1. 8882204

welchem der Logarithmus von 77 nahe kömmt, daher die Seite NQ 77 Schuh beträgt.

§. 43.

Dieser Aufgabe müßte man sich also bedienen, wenn man die Entfernung zweyer Oerter, zu denen beyden man kommen kann, z. E. BG (Fig. 80. Tab. 7.) trigonometrisch finden wollte.

§. 44.

Aufgabe. Aus den gegebenen drey Seiten eines Triangels die Winkel zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 116.) in dem Triangel QCP,

die Seite QP = 24′
die Seite CQ = 17′
die Seite CP = 11′

Man stelle sich eine senkrechte Linie CB aus der Spitze desjenigen Winkels vor, welcher der größten Seite QP gegenüber steht, so wird der Triangel QCP in die beyden rechtwinklichten Triangel QCB und CBP zergliedert. Nun beschreibe man mit der kleinsten Seite CP einen Cirkel, und suche zuerst den Theil von QP, welcher sich ausserhalb der Periphe-

rie

rie befindet, nemlich QS, durch folgende Propor: tion:

QP : CQ + CP = CQ — CP : QS
(§. 29.)

d. i. 24′ : 17′ + 11′ = 17′ — 11′ : QS

oder 24′ : 28′ = 6′ : QS

$$QS = \frac{28' \times 6'}{24'} = 7'$$

Diese Linie QS dient dazu, die Chorde SP und ihre Hälfte BP zu finden. Denn

SP = QP — QS

d. i. SP = 24′ — 7′ = 17′

BP = $\frac{1}{2}$ SP = 8′ 5″ (§. III. Geom.)

In dem rechtwinklichten Triangel CBP ist also die Hypothenuse CP und der Cathetus BP bekannt, folglich läßt sich der Winkel P finden, wenn man schließt:

CP : BP = Sin. Tot. : Cos. P (§. 22.)

11′ : 8′ 5″ = Sin. Tot. : Cos. P

oder 110″ : 85″ = Sin. Tot. : Cos. P

log. Cos. P = log. 85 + log. Sin. Tot. — log. 110

log. 85 = 1. 9294189

log. Sin. Tot. = 10. 0000000

11. 9294189

log. 110 = 2. 0413927

log. Cos. P = 9. 8880262

welches der Logarithmus Sinus von 50°, 36′ ist, des-

ſen Complements-Winkel alſo, nemlich 39° 24′ der Winkel P ſeyn muß.

Auf eben die Art läßt ſich auch der Winkel Q berechnen, wenn man in dem andern rechtwinklichten Triangel QCB, wo die Hypothenuſe QC gegeben iſt, noch die Seite QB beſtimmt. Es iſt aber

$$QB = QS + SB = QS + \tfrac{1}{2} SP$$ (§. III. Geom.)

d. i. $QB = 7' + 8' 5'' = 15', 5''$

Da ſich nun verhält

$$QC : QB = \text{Sin. Tot.} : \text{Cof. } Q$$ (§. 22.)

d. i. $17' : 15', 5'' = \text{Sin. Tot.} : \text{Cof. } Q$

oder $170'' : 155'' = \text{Sin. Tot.} : \text{Cof. } Q$

---

log. Cof. Q = log. 155 + log. Sin. Tot. — log. 170

log. 155	=	2. 1903317
log. Sin. Tot.	=	10. 0000000
		12. 1903317
log. 170	=	2. 2304489
log. Cof. Q	=	9. 9598828

zu welchem der Logarithmus Sinus von 65°, 45′ gehöret. Da nun dieſes der Complements-Winkel von Q iſt, ſo muß Q ſelbſt ein Winkel von 24°, 15′ ſeyn.

Hieraus iſt der dritte Winkel QCP leicht zu beſtimmen. Denn es war

$$\frac{\begin{array}{r} P = 39°, 24' \\ Q = 24°, 15' \end{array}}{P + Q = 63°, 39'}$$

$$\frac{P + Q = 63°, 39'}{180° - (P + Q) = QCP}$$

$$180° - 63, 39' = 116°, 21' = QCP$$

§. 45.

Wenn nicht von einem ungleichseitigen Triangel, wie in der vorigen Aufgabe, die Rede ist, so lassen sich die Winkel geschwinder finden. Von einem gleichseitigen Triangel weiß man die Winkel ohne Rechnung, indem jeder 60° beträgt, (§. 75. Geom.) und in einem gleichschenklichten könnte man die Winkel aus den gegebenen Seiten auf folgende Art berechnen. Es sey z. E. (Fig. 41. Tab. 3.) in dem gleichschenklichten Triangel CAD

$$\begin{array}{rcl} AC & = & 36' \\ AD & = & 36' \\ CD & = & 28' \end{array}$$

so ist, wenn man AB senkrecht auf CD ziehet, CB $=$ BD $= \frac{1}{2}$ CD. Denn

$$\frac{\begin{array}{rcl} AC & = & AD \text{ vermöge der angenommenen Bedingung} \\ AB & = & AB \\ c & = & c \text{ vermöge der Constr.} \end{array}}{CB = BD \quad (\S.\ 106.\ \text{Geom.})}$$

$$\frac{CD = CB + BD = 2\ CB}{\frac{1}{2}\ CD = CB}$$

d. i. $\frac{28'}{2} = 14' = CB$

Nun verhält sich

AC : CB = Sin. Tot. : Cos. C (§. 22.)
36′ : 14′ = Sin. Tot. : Cos. C

---

log. Cos. C = log. 14 + log. Sin. Tot. — log. 36

log. 14 = 1.1461280
log. Sin. Tot. = 10.0000000

11.1461280

log. 36 = 1.5563025

log. Cos. C = 9.5898255

zu welchem ein Winkel von 22°, 53′ gehöret, dessen Complements-Winkel also, nemlich 67°, 7′ der Winkel C seyn muß; weil also C = 67°, 7′

D = C (§. 74. Geom.)

D = 67°, 7′
und < CAD = 180° — (67°, 7′ + 67°, 7′)
d. i. < CAD = 180° — 134°, 14′ = 45°, 46′

§. 46.

Sollte man also auf dem Felde oder sonst einen Winkel messen, ohne daß man einen Winkelmesser oder ein ander Instrument bey der Hand hätte, so liesse sich dieses bewerkstelligen, wenn man sich auf den Schenkeln des gegebenen Winkels zwey gleiche Stücke erwählte, alsdenn ihre Grösse und die Entfernung ihrer Endpuncte von einander durch Hülfe einer Kette oder Stange bestimmte; denn so würde man die Seiten eines gleichschenklichten Triangels erhalten, aus denen man den verlangten Winkel nach

§. 45.

45. trigonometrisch berechnen könnte. Sonst kann
n sich auch zu dieser Absicht eine Tabelle verferti-
, wie die folgende ist, worinnen man die Sehnen
: Winkel nach einem Halbmesser von 30 Schuh
det, welche sich aber nur in den Fällen gebrauchen
t, wo man nicht nöthig hat, die Winkel bis auf
zelne Minuten zu bestimmen. Nemlich weil die
inus nichts anders sind, als die Hälften der Chor-
, die zu einem doppelten Bogen gehören, (§. 6.)
darf man nur die Sinus der Winkel aus den ge-
hnlichen Tabellen nehmen, und mit 2 multiplici-
, um die Sehnen noch einmal so grosser Bogen zu
alten. Z. E. der Sinus von 9°, 30′ ist = 1650476
glich ist 1650476 × 2 d. i. 3300952 die Chorde
n einem Bogen, der zweymal so viel beträgt, als
, 30′, d. h. von einem Bogen von 19°, wobey aber,
ie man wohl merken muß, der Halbmesser 10000000
genommen wird. Weil nun diese genaue Eintei-
ng des Halbmessers und der Chorden durch die ge-
öhnlichen Meßketten und Schnuren nicht ausge-
ückt werden kann, so pflegt man die Chorden nach
nem kleinern Halbmesser zu berechnen, welches
rch Hülfe der Regel Detri leicht geschehen kann,
enn man sie nur erst aus den Sinus Tabellen nach
em grössern Halbmesser bestimmt hat. So würde
an z. E. nachdem man auf die vorige Art die Chor-
e von 19° nach dem Halbmesser 10000000 gefun-
en hätte, eben dieselbe nach einem Halbmesser von
0′ = 300″, welcher in der angehängten Tabelle
um Grunde gelegt wird, durch folgende Proportion
inden können:

Wie

Wie sich verhält der Halbmesser 10000000 zu dem Halbmesser 300, so verhält sich die Sehne von 19° nach dem ersten Halbmesser, d. i. 3300952 zu der Sehne von 19° nach dem Halbmesser von 300

10000000 : 300 = 3300952

3

100000) 990002756 (99$\frac{2756}{100000}$

Die Chorde eines Bogens von 19° enthält also 99$\frac{2756}{100000}$ Zolle, wenn der Halbmesser 300 Zolle oder 30 Schuh beträgt. Den Bruch $\frac{2756}{100000}$, welcher ein sehr kleiner Theil eines Zolls ist, und daher mit der Kette oder Schnur nicht ausgedrückt werden kann, läßt man weg, und nimmt also nur 99 Zoll, d. i. 9 Schuh, 9 Zoll für die Chorde eines Winkels von 19 Grad an, wie man aus der angehängten Tabelle sehen kann.

Will man nun also durch Hülfe dieser Tabelle die Grösse eines Winkels auf dem Felde erforschen, so bemerke man durch ein Paar Stäbe auf den beyden Schenkeln des zu messenden Winkels diejenigen Puncte, die 30 Schuh von seiner Spitze abstehen, messe alsdenn die Entfernung dieser beyden Stäbe, und suche diese gemessene Linie unter den Chorden, so wird man dabey die Grösse des Winkels angezeigt finden. Z. E. hätte man die Chorde 20 Schuh 9 Zoll gefunden, so würde der Winkel 40°, 46′ enthalten. Man kann auch die Winkel auf dem Papiere auf diese Art messen, wenn man mit dem Cirkel durch Hülfe des verjüngten Maasstabes den Halbmesser auf die Schenkel eines Winkels trägt, und alsdenn auf vorige Art verfähret. Ist ein verjüng-

ter

ter Maasstab zu dieser Absicht besonders verfertiget, die Grösse der Bogen durch ihre Chorden zu finden, so wird er ein geradelinichter Transporteur genannt, welcher auch, so wie die gegenwärtige Tabelle dazu dienet, einen gegebenen Winkel, wenn nicht die größte Genauigkeit verlangt wird, auf das Papier oder auf das Feld zu tragen. Sollte man z. E. einen Winkel von 49°, 15′ beschreiben, so nehme man die Chorde von 49°, 15′, welche nach einem Halbmesser von 30 Schuh, 25 Schuh beträgt; mache einen gleichschenklichten Triangel, aus zwey Seiten von 30′ und einer Seite von 25′, so muß der Winkel, welcher der Seite von 25 Schuh gegenüber steht, 49°, 15′ enthalten. Auf dem Papier braucht man nur mit dem Halbmesser aus demjenigen Puncte, welcher die Spitze des Winkels seyn soll, einen Bogen zu beschreiben, und die Chorde in diesen Bogen zu tragen, so wird dadurch der verlangte Winkel bestimmt.

Tafel

Tafel

zur Messung der Bogen oder Winkel durch Hülfe der Chorden,

wobey der Halbmesser von 30 Schuh, und die Eintheilung des Schuhs in 10 Zoll angenommen wird.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
0.	1.	0.	11.	3.	0.	5.	43.
	2.		23.		1.		55.
	3.		34.		2.	6.	7.
	4.		46.		3.		19.
	5.		57.		4.		30.
	6.	1.	9.		5.		41.
	7.		20.		6.		53.
	8.		31.		7.	7.	5.
	9.		43.		8.		16.
1.	0.		55.		9.		27.
	1.	2.	6.	4.	0.		39.
	2.		17.		1.		50.
	3.		29.		2.	8.	2.
	4.		40.		3.		13.
	5.		52.		4.		25.
	6.	3.	3.		5.		36.
	7.		15.		6.		47.
	8.		26.		7.		59.
	9.		38.		8.	9.	10.
2.	0.		49.		9.		22.
	1.	4.	1.	5.	0.		34.
	2.		12.		1.		45.
	3.		23.		2.		56.
	4.		35.		3.	10.	8.
	5.		47.		4.		20.
	6.		58.		5.		31.
	7.	5.	9.		6.		42.
	8.		21.		7.		54.
	9.		32.		8.	11.	6.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
5.	9.	11.	17.
6.	0.		29.
	1.		40.
	2.		52.
	3.	12.	3.
	4.		14.
	5.		26.
	6.		38.
	7.		49.
	8.	13.	1.
	9.		12.
7.	0.		24.
	1.		36.
	2.		47.
	3.		58.
	4.	14.	10.
	5.		22.
	6.		33.
	7.		45.
	8.		56.
	9.	15.	8.
8.	0.		20.
	1.		31.
	2.		42.
	3.		54.
	4.	16.	6.
	5.		17.
	6.		29.
	7.		40.
	8.		52.
	9.	17.	4.
9.	0.		15.
	1.		26.
	2.		38.
	3.		50.
	4.	18.	2.
	5.		14.
	6.		25.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
9.	7.	18.	36.
	8.		48.
	9.	19.	0.
10.	0.		11.
	1.		23.
	2.		34.
	3.		46.
	4.		57.
	5.	20.	9.
	6.		21.
	7.		33.
	8.		44.
	9.		56.
11.	0.	21.	8.
	1.		19.
	2.		31.
	3.		42.
	4.		54.
	5.	22.	6.
	6.		18.
	7.		29.
	8.		41.
	9.		52.
12.	0.	23.	4.
	1.		16.
	2.		28.
	3.		40.
	4.		51.
	5.	24.	3.
	6.		14.
	7.		26.
	8.		38.
	9.		50.
13.	0.	25.	2.
	1.		14.
	2.		25.
	3.		37.
	4.		48.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
13.	5.	26.	0.	17.	3.	33.	31.
	6.		12.		4.		43.
	7.		24.		5.		55.
	8.		36.		6.	34.	7.
	9.		47.		7.		19.
14.	0.		59.		8.		31.
	1.	27.	11.		9.		43.
	2.		23.	18.	0.		55.
	3.		34.		1.	35.	7.
	4.		46.		2.		19.
	5.		58.		3.		31.
	6.	28.	10.		4.		43.
	7.		22.		5.		55.
	8.		34.		6.	36.	7.
	9.		46.		7.		19.
15.	0.		57.		8.		31.
	1.	29.	9.		9.		43.
	2.		21.	19.	0.		55.
	3.		33.		1.	37.	7.
	4.		44.		2.		20.
	5.		56.		3.		32.
	6.	30.	8.		4.		44.
	7.		20.		5.		56.
	8.		32.		6.	38.	8.
	9.		44.		7.		20.
16.	0.		56.		8.		32.
	1.	31.	8.		9.		44.
	2.		20.	20.	0.		56.
	3.		32.		1.	39.	9.
	4.		44.		2.		21.
	5.		56.		3.		33.
	6.	32.	7.		4.		45.
	7.		19.		5.		58.
	8.		31.		6.	40.	10.
	9.		43.		7.		22.
17.	0.		55.		8.		34.
	1.	33.	7.		9.		46.
	2.		19.	21.	0.		58.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
21.	1.	41.	10.
	2.		22.
	3.		35.
	4.		47.
	5.	42.	0.
	6.		12.
	7.		24.
	8.		36.
	9.		49.
22.	0.	43.	1.
	1.		14.
	2.		26.
	3.		38.
	4.		50.
	5.	44.	3.
	6.		15.
	7.		27.
	8.		40.
	9.		52.
23.	0.	45.	5.
	1.		17.
	2.		30.
	3.		42.
	4.		55.
	5.	46.	7.
	6.		19.
	7.		32.
	8.		45.
	9.		57.
24.	0.	47.	9.
	1.		22.
	2.		34.
	3.		47.
	4.		59.
	5.	48.	12.
	6.		24.
	7.		37.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
24.	8.	48.	50.
	9.	49.	2.
25.	0.		15.
	1.		28.
	2.		40.
	3.		53.
	4.	50.	5.
	5.		18.
	6.		31.
	7.		43.
	8.		56.
	9.	51.	9.
26.	0.		22.
	1.		34.
	2.		47.
	3.	52.	0.
	4.		12.
	5.		25.
	6.		38.
	7.		51.
	8.	53.	4.
	9.		16.
27.	0.		29.
	1.		42.
	2.		55.
	3.	54.	8.
	4.		20.
	5.		33.
	6.		46.
	7.		59.
	8.	55.	12.
	9.		25.
28.	0.		38.
	1.		51.
	2.	56.	4.
	3.		17.
	4.		30.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
28.	5.	56.	43.
	6.		56.
	7.	57.	9.
	8.		22.
	9.		35.
29.	0.		48.
	1.	58.	2.
	2.		15.
	3.		28.
	4.		41.
	5.		54.
	6.	59.	7.
	7.		20.
	8.		33.
	9.		47.
30.	0.	60.	0.
	1.		13.
	2.		26.
	3.		40.
	4.		53.
	5.	61.	6.
	6.		19.
	7.		33.
	8.		46.
	9.	62.	0.
31.	0.		13.
	1.		27.
	2.		40.
	3.		53.
	4.	63.	6.
	5.		20.
	6.		34.
	7.		47.
	8.	64.	0.
	9.		14.
32.	0.		27.
	1.		41.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
32.	2.	64.	55.
	3.	65.	8.
	4.		22.
	5.		36.
	6.		49.
	7.	66.	3.
	8.		17.
	9.		30.
33.	0.		44.
	1.		58.
	2.	67.	11.
	3.		25.
	4.		39.
	5.		53.
	6.	68.	6.
	7.		20.
	8.		34.
	9.		48.
34.	0.	69.	2.
	1.		16.
	2.		30.
	3.		44.
	4.		58.
	5.	70.	12.
	6.		26.
	7.		40.
	8.		54.
	9.	71.	8.
35.	0.		22.
	1.		36.
	2.		50.
	3.	72.	5.
	4.		19.
	5.		33.
	6.		47.
	7.	73.	2.
	8.		16.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
35.	9.	73.	30.
36.	0.		44.
	1.		58.
	2.	74.	13.
	3.		27.
	4.		42.
	5.		56.
	6.	75.	11.
	7.		26.
	8.		40.
	9.		54.
37.	0.	76.	9.
	1.		24.
	2.		38.
	3.		52.
	4.	77.	7.
	5.		22.
	6.		37.
	7.		51.
	8.	78.	6.
	9.		21.
38.	0.		36.
	1.		50.
	2.	79.	5.
	3.		20.
	4.		35.
	5.		50.
	6.	80.	5.
	7.		20.
	8.		35.
	9.		50.
39.	0.	81.	5.
	1.		20.
	2.		35.
	3.		50.
	4.	82.	5.
	5.		20.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
39.	6.	82.	36.
	7.		51.
	8.	83.	6.
	9.		22.
40.	0.		37.
	1.		52.
	2.	84.	8.
	3.		24.
	4.		39.
	5.		55.
	6.	85.	10.
	7.		26.
	8.		41.
	9.		57.
41.	0.	86.	13.
	1.		29.
	2.		44.
	3.	87.	0.
	4.		16.
	5.		31.
	6.		47.
	7.	88.	3.
	8.		19.
	9.		35.
42.	0.		51.
	1.	89.	8.
	2.		24.
	3.		40.
	4.		56.
	5.	90.	12.
	6.		28.
	7.		44.
	8.	91.	1.
	9.		17.
43.	0.		34.
	1.		50.
	2.	92.	6.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
43.	3.	92.	23.
	4.		40.
	5.		56.
	6.	93.	13.
	7.		30.
	8.		46.
	9.	94.	3.
44.	0.		20.
	1.		37.
	2.		54.
	3.	95.	11.
	4.		28.
	5.		45.
	6.	96.	2.
	7.		19.
	8.		36.
	9.		53.
45.	0.	97.	11.
	1.		28.
	2.		46.
	3.	98.	3.
	4.		20.
	5.		38.
	6.		56.
	7.	99.	14.
	8.		31.
	9.		49.
46.	0.	100.	6.
	1.		24.
	2.		42.
	3.	101.	0.
	4.		18.
	5.		37.
	6.		55.
	7.	102.	13.
	8.		31.
	9.		50.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
47.	0.	103.	8.
	1.		26.
	2.		45.
	3.	104.	4.
	4.		22.
	5.		41.
	6.	105.	0.
	7.		19.
	8.		38.
	9.		57.
48.	0.	106.	16.
	1.		35.
	2.		54.
	3.	107.	13.
	4.		32.
	5.		52.
	6.	108.	12.
	7.		31.
	8.		51.
	9.	109.	10.
49.	0.		30.
	1.		50.
	2.	110.	10.
	3.		30.
	4.		50.
	5.	111.	10.
	6.		31.
	7.		51.
	8.	112.	12.
	9.		32.
50.	0.		53.
	1.	113.	14.
	2.		35.
	3.		56.
	4.	114.	17.
	5.		38.
	6.		59.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
50.	7.	115.	20.
	8.		42.
	9.	116.	4.
51.	0.		25.
	1.		47.
	2.	117.	9.
	3.		31.
	4.		53.
	5.	118.	16.
	6.		38.
	7.	119.	1.
	8.		23.
	9.		46.
52.	0.	120.	9.
	1.		32.
	2.		55.
	3.	121.	18.
	4.		42.
	5.	122.	6.
	6.		29.
	7.		53.
	8.	123.	17.
	9.		41.
53.	0.	124.	6.
	1.		30.
	2.		55.
	3.	125.	20.
	4.		45.
	5.	126.	10.
	6.		36.
	7.	127.	1.
	8.		27.
	9.		53.
54.	0.	128.	19.
	1.		46.
	2.	129.	12.
	3.		39.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
54.	4.	130.	6.
	5.		33.
	6.	131.	0.
	7.		28.
	8.		56.
	9.	132.	24.
55.	0.		53.
	1.	133.	22.
	2.		51.
	3.	134.	20.
	4.		50.
	5.	135.	20.
	6.		50.
	7.	136.	21.
	8.		52.
	9.	137.	24.
56.	0.		56.
	1.	138.	28.
	2.	139.	0.
	3.		33.
	4.	140.	6.
	5.		40.
	6.	141.	14.
	7.		49.
	8.	142.	24.
	9.	143.	0.
57.	0.		36.
	1.	144.	13.
	2.		51.
	3.	145.	30.
	4.	146.	9.
	5.		48.
	6.	147.	29.
	7.	148.	10.
	8.		53.
	9.	149.	36.
58.	0.	150.	20.

Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.	Chorden. Schuh.	Zoll.	Winkel. Grad.	Min.
58.	1.	151.	5.	59.	1.	160.	8.
	2.		52.		2.	161.	16.
	3.	152.	39.		3.	162.	29.
	4.	153.	28.		4.	163.	47.
	5.	154.	20.		5.	165.	12.
	6.	155.	12.		6.	166.	46.
	7.	156.	6.		7.	168.	32.
	8.	157.	2.		8.	170.	38.
	9.	158.	1.		9.	173.	23.
59.	0.	159.	3.	60.	0.	180.	0.

Die

Die Naturlehre.

Einleitung.

§. 1.

Die Naturlehre oder Physik im weitläuftigsten Verstande ist eigentlich diejenige Wissenschaft, welche sich mit den natürlichen Körpern beschäftiget, und aus demjenigen, was wir durch Hülfe der Sinne von ihnen wahrnehmen, ihre Eigenschaften und Wirkungen durch richtige Schlüsse entdecken lehret. Weil aber die Anzahl der wirklichen Körper ausserordentlich groß ist, so pflegt man die Kenntnisse davon insgemein in mehr als einer Wissenschaft vorzutragen, und in der eigentlichen Naturlehre ausser den allgemeinsten Eigenschaften der Körper, nur die besondern Eigenschaften der Luft, des Feuers, des Lichts, der Erde u. s. f. zu erklären. Will man also z. E. die verschiednen Classen der Körper, welche sich auf dem Erdboden befinden, und ihre Eigenschaften kennen lernen, so muß man in der natürlichen Geschichte davon Unterricht suchen. Verlangt man eine genauere Kenntniß von dem menschlichen Körper, so muß man seine Zuflucht zu denen medicinischen Wissenschaften nehmen, die eigentlich nichts anders sind, als Theile der Physik, welche man besonders und ausführlich bearbeitet hat.

§. 2.

Man pflegt die Physik in die **Experimental-** und **dogmatische Physik** einzutheilen. Die **Experimental-Physik** enthält diejenigen Wahrheiten, die sich durch Hülfe der Sinne erkennen lassen. In der **dogmatischen Physik** aber wird gezeigt, wie man aus solchen Sätzen, zu denen man durch Hülfe der Sinne gelangt ist, die Wirkungen und Ursachen der Begebenheiten in der Körperwelt erklären könne. Es ist also aus diesen Erklärungen offenbar, daß die dogmatische Physik ohne die Experimental-Physik nicht bestehen, diese hingegen ohne jene von keinem grossen Nutzen seyn würde. Die Erfahrungen aber, welche man in der Naturlehre nöthig hat, sind von zweyerley Art. Einige erlangen wir blos dadurch, indem wir bey unsrer Empfindung die gehörige Aufmerksamkeit und Vorsicht gebrauchen. Andre hingegen sind nicht anders möglich, als wenn wir die Körper durch Hülfe der Kunst zu gewissen Wirkungen nöthigen, damit wir dieselben empfinden können. Erfahrungen von der ersten Art werden **Beobachtungen** oder **Observationen**, und Erfahrungen von der andern Art **Versuche** oder **Experimente** genannt.

§. 3.

Uebrigens ist die Naturlehre eine der vortreflichsten und nützlichsten Wissenschaften, wovon sich jeder leicht überzeugen wird, wenn er sich die Mühe giebt, nur einen Theil derjenigen Wahrheiten, die sie lehret, sich einigermassen bekannt zu machen. Ausser der Offenbahrung giebt es keine Wissenschaft, die so viel zu der Erkenntniß der Allmacht und Weißheit Gottes beytragen könnte. Von dem Aberglauben

und

und von ungegründeter Furcht kann uns die Naturlehre am besten befreyen, und ohne sie würden wir im gemeinem Leben tausend Bequemlichkeiten und Annehmlichkeiten entbehren müssen.

Erstes Capitel.

Von den allgemeinen Eigenschaften der Körper.

§. 4.

Körper sind diejenigen sinnlichen theilbaren Dinge, aus welchen die sichtbare Welt bestehet. Dasjenige, woraus die Körper zusammengesetzt sind, nennt man die **Materie**, und die Menge derselben die **Maße** der Körper.

§. 5.

Unter den Eigenschaften der Körper giebt es einige, welche allen Körpern zukommen, und einige, welche man nur bey gewissen Körpern antrift. Jene pflegt man daher die **allgemeinen**, und diese die **besondern Eigenschaften** der Körper zu nennen.

§. 6.

Die allgemeinen Eigenschaften der Körper sind die **Ausdehnung**, die **Undurchdringlichkeit**, die **Theilbarkeit**, die **Bewegbarkeit** und die **Schwere**. Die ersten vier Eigenschaften sind dem Körper wesentlich. Von der Schwere aber kann man dieses nicht behaupten. Sie wird nur deswegen unter die allgemeinen Eigenschaften gerechnet, weil man sie bey allen Körpern, von welchen wir eine Kenntniß haben, antrift.

§. 7.

Die **Ausdehnung** ist diejenige Eigenschaft, nach welcher ein jeder Cörper einen gewissen Raum in die Länge, Breite und Dicke einnimmt. Die **Undurchdringlichkeit** besteht darinnen, daß ein jeder Körper seinen eigenen Raum einnimmt, so daß kein anderer Körper zugleich in demselben Raume seyn kann. Wenn man im gemeinen Leben sagt, daß ein Körper von einem andern, z. E. ein Schwamm vom Wasser durchdrungen sey, so ist dieses nicht so zu verstehen, als wenn die Theile des Wassers nunmehr eben denselben Raum einnähmen, in welchem sich die Theile des Schwammes befinden, welches eine unmögliche Sache ist; sondern es heißt nur so viel, daß die Theile des Wassers sich zwischen die Theile des Schwammes begeben hätten, welches deswegen leicht geschehen kann, weil der Schwamm eine Menge Zwischenräume enthält, die von der Materie des Schwammes ganz leer sind.

§. 8.

Durch die **Theilbarkeit** versteht man hier nicht blos, wie in der Geometrie und Arithmetik, die Möglichkeit sich verschiedne Theile bey einem Körper vorzustellen, sondern man will dadurch diejenige Eigenschaft anzeigen, vermöge welcher die Theile, aus denen ein Körper besteht, von einander wirklich abgesondert und in einen andern Raum gebracht werden können. Die meisten Körper lassen sich bis zu einer erstaunenden und beynahe unglaublichen Subtilität theilen. Von den vielen Beyspielen, welche man davon in den Schriften der Naturforscher antrift, will ich nur einige anführen. Ein Gran Gold, welches ein so kleines Stückchen ist, daß es nur den achten

ten Theil einer Cubiklinie ausmacht, läßt sich, wenn es geschlagen wird, so ausdehnen, daß es einen Raum von 50 Quadratzoll einnimmt. Nun enthält, wie aus der Geometrie bekannt ist, ein Quadratzoll 100 Quadratlinien, und eine Quadratlinie 100 Quadratscrupel, folglich ein Quadratzoll 10000 Quadratscrupel, und 50 Quadratzoll 500000 Quadratscrupel, welches noch sehr ansehnliche Theile sind, die man auch mit blöden Augen sehr wohl unterscheiden kann; Weil also eine Cubiklinie Gold, wie schon bemerkt worden ist, 8 Gran wieget, so ist klar, daß sich eine Cubiklinie Gold in 8 mal 500000, d. i. in 4000000 Quadratscrupel ausdehnen läßt. Betrachtete man diese Theile durch ein Vergrösserungeglas, das nur 10000 mal vergrösserte, so würde man dadurch 10000 mal mehr Theile erblicken. Es ist also gewiß, daß in einer einzigen Cubiklinie Gold 10000 mal 4000000, d. i. 40000 Millionen Theile anzutreffen sind, die noch eine sehr merkliche Zusammensetzung haben.

Boyle hat einen Gran Kupfer durch Salmiak aufgelöset, und diese Auflösung in eine Menge Wasser gegossen, welche 28534 Gran gewogen, wodurch das ganze Wasser völlig blau gefärbt worden ist. Da nun ein Gran Wasser $\frac{37}{10000}$ Theilchen eines Cubikzolls ausmacht, so hat das gefärbte Wasser beynahe 10557 Cubikzoll Raum eingenommen; und weil jedes sichtbare Theilchen des Wassers blau geworden, so muß in jedem Wassertheilchen ein Theilchen des aufgelößten Kupfers vorhanden gewesen seyn. Ein Cubikzoll enthält 1000 Cubiklinien, eine Cubiklinie 1000 Cubikscrupel, folglich ein Cubikzoll 1000000 und 10557 Cubikzoll 10557000000 Cubikscrupel, welches Theile sind, die sich noch sehr wohl

mit

mit blossen Augen unterscheiden lassen. Hieraus ist also klar, daß ein kleines Stückchen Kupfer, das nur einen Gran wiegt, in 10557000000 sichtbare Theile wirklich getheilt werden kann.

Mit einem Gran Weyhrauch läßt sich, wenn er angezündet wird, ein Zimmer erfüllen, dessen Länge und Breite 20, die Höhe aber 15 Schuh beträgt. Da nun die gewöhnlichen Stuben als Parallelepipeda betrachtet werden können, so muß der cörperliche Raum einer Stube von der jetzt angeführten Länge, Breite und Höhe 20 × 20 × 15, d. i. 6000 Cubikschuh, (§. 193. Geom.) und folglich 6000000000000 Cubikscrupel enthalten. In so viel Theile muß also ein Gran Weyhrauch durch das Feuer aufgelöset werden, weil man in jedem Puncte des Zimmers den Geruch davon empfindet.

Löwenhoek hat in Wasser, worein er Pfeffer gethan, und welches er an die freye Luft gesetzt hatte, durch Hülfe eines Microscops kleine Thierchen bemerkt, deren Diameter 1000 mal kleiner war, als der Diameter eines Sandkörnchens. Da sich nun die kugelförmigen Körper wie die Cubikzahlen ihrer Durchmesser verhalten, (§. 222. Geom.) so verhält sich die Grösse eines solchen Thierchens zu der Grösse eines Sandkörnchens, wie 1^3 zu 1000^3, d. i. wie 1 zu 1000000000. Nun überlege man einmal, wie klein und subtil die Gliedmassen solcher Thierchen, deren Bewegungen vom Löwenhoek sehr deutlich bemerkt werden konnten, gewesen seyn müssen!

§. 9.

Ohngeachtet man es aber schon sehr weit in der Theilung der Körper gebracht hat, so ist man doch noch

noch nicht im Stande, die Körper bis auf die ganz einfachen und untheilbaren Bestandtheile, aus denen sie zusammengesetzt sind, und welche man **Atomen, Monaden** oder **Elemente** * zu nennen pflegt, zu zergliedern. Die allerkleinsten Theile, in welche wir die Körper durch die Kunst auflösen können, sind noch immer sehr zusammengesetzt, wie man sich davon durch gute Vergrösserungsgläser leicht überzeugen kann. Die Unvollkommenheit unsrer Sinne läßt uns auch nicht hoffen, daß wir jemals zu einer Kenntniß dieser ursprünglichen und ganz einfachen Theile der Körper gelangen werden.

§. 10.

Die vierte von den allgemeinen Eigenschaften der Körper war die **Bewegbarkeit**, nach welcher die Körper ihren Ort verändern können. Der Ort aber ist zweyerley, der **absolute** und der **relative**. Durch den **absoluten** Ort versteht man denjenigen Theil des Raums, den ein Körper einnimmt, durch den **relativen** aber diejenige Lage, die ein Körper in Ansehung andrer Körper hat, mit welchen wir ihn vergleichen. Man theilt daher auch die Bewegung in die **absolute** und **relative** ein. Die **absolute** ist diejenige, wenn ein Körper seinen absoluten Ort, die **relative** oder **scheinbare**, wenn er nur seinen relativen Ort verändert. Auf eben die Art wird auch die **Ruhe** eingetheilt, welche der Bewegung entgegen-

* Durch das Wort **Elemente** versteht man auch sonst in der Physik solche Körper, die nicht Theile von verschiedner Art enthalten, und aus welchen die übrigen Körper bestehen. In dieser Bedeutung pflegt man die Luft, das Feuer, das Wasser und die Erde die vier Elemente zu nennen.

gengesetzt wird, und folglich derjenige Zustand eines Körpers ist, da er in seinem Orte bleibet. Sie ist **absolut**, wenn der absolute Ort, und **relativ**, wenn der relative Ort nicht verändert wird. Bey der relativen Bewegung ruht also eigentlich der Körper, welchem man eine Bewegung zuschreibt, und nur derjenige, auf welchen man ihn beziehet, oder das Auge des Beobachters ist eigentlich in Bewegung. Bey der relativen Ruhe hingegen können sich beyde Körper, die man mit einander vergleicht, wirklich bewegen, wofern sie nur unter sich einerley Lage behalten.

§. 11.

Bey einer Bewegung unterscheide man die **Kraft**, oder dasjenige, welches die Bewegung verursacht, die **Maße**, oder Menge der Materie, welche bewegt wird, die **Direction** oder **Richtung**, d. i. die Bestimmung des Puncts, gegen welchen eine Bewegung zugehet, und die **Geschwindigkeit**, d. i. die Bestimmung des Raums, durch welchen ein Körper binnen einer gewissen Zeit bewegt wird.

§. 12.

Entsteht die Bewegung von einer einzigen Kraft, die nach einerley Richtung wirket, so wird die Bewegung **einfach** genannt; entsteht sie aber durch mehrere Kräfte, die entweder nach entgegengesetzten Richtungen, oder nach verschiednen Linien wirken, so heißt die Bewegung **zusammengesetzt**. Im letztern Falle bewegt sich ein Körper, der von zwey Kräften getrieben wird, deren Richtungslinien einen Winkel machen, weder nach der Richtung der einen, noch nach der Richtung der andern Kraft, sondern nach der Diagonale des Parallelograms, das man aus

den

den Richtungslinien dieser Kräfte beschreiben kann, wenn man ihre Längen den Geschwindigkeiten proportional macht.

§. 13.

In Ansehung der Geschwindigkeit theilt man die Bewegungen in **gleichförmige** und **ungleichförmige** ein. Bey der **gleichförmigen** Bewegung behält der Körper beständig einerley Geschwindigkeit, bey der **ungleichförmigen** aber ist dieselbe verschieden. Nimmt die Geschwindigkeit zu, so wird die ungleichförmige Bewegung eine **beschleunigte**, nimmt sie aber ab, eine **verzögerte** Bewegung genannt.

§. 14.

Wenn sich zwey Körper gleichförmig bewegen, so ist es leicht, ihre Geschwindigkeiten mit einander zu vergleichen. Denn bewegt sich z. E. der eine Körper in einer Minute durch 2 Schuh, und der andre in eben der Zeit durch 1 Schuh, so erhellt aus dem Begriffe der Geschwindigkeit, daß der erste Körper sich noch einmal so geschwinde beweget, als der andre. Bewegte sich der erste durch einen dreymal grössern Raum, als der andre Körper in eben der Zeit, so müßte auch die Geschwindigkeit des ersten Körpers dreymal grösser seyn, als die Geschwindigkeit des andern Körpers. **Sind also die Zeiten gleich, in welchen sich zwey Körper bewegen, so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten, wie die Räume, welche sie durchlaufen.**

§. 15.

Nun wollen wir setzen, es bewegten sich zwey Körper durch verschiedne Räume und in verschiednen

Zei-

Zeiten; z. E. der erste durchlaufe 24 Schuh in vier Secunden, und der andre 15 Schuh in 5 Secunden, so ist klar, daß man ihre Geschwindigkeiten nach dem vorigen Satze würde beurtheilen können, wenn man ihre Bewegungen auf einerley Zeit, z. E. auf die Zeit von einer Secunde reducirte. Weil nun hier von einer gleichförmigen Bewegung die Rede ist, so muß der erste Körper, der sich in 4 Secunden durch 24 Schuh bewegt, in einer Secunde $\frac{24}{4}$ d. i. 6 Schuh, und der andre Körper, der sich in 5 Secunden durch 15 Schuh bewegt, in einer Secunde $\frac{15}{5}$ d. i. 3 Schuh bewegen. Es würde sich also die Geschwindigkeit des ersten zu der Geschwindigkeit des andern Körpers verhalten, wie 6 zu 3. Die Zahl 6 aber entstund, indem man den Raum des ersten Körpers, nemlich 24 Schuh, durch seine Zeit, nemlich 4 Secunden, und die Zahl 3, indem man den Raum des andern Körpers, nemlich 15 Schuh, durch seine Zeit, nemlich 5 Secunden dividirte. Hieraus erhellt also, daß sich die Geschwindigkeiten überhaupt verhalten, wie die Räume, welche die bewegten Körper durchlaufen, dividirt durch die Zeiten, in welchen sie dieselben durchlaufen.

§. 16.

Es heisse die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers G, der Raum, durch welchen er sich bewegt, R, und die Zeit, welche er dazu nöthig hat, Z. Die Geschwindigkeit eines andern Körpers heisse g, der Raum r, und die Zeit z, so verhält sich nach dem vorigen Satze

$$G : g = \frac{R}{Z} : \frac{r}{z}$$

$$G \times Z : g = \frac{R}{Z} \times Z : \frac{r}{z} \text{ (§. 101. Ar.)}$$

$$\frac{R}{Z} \times Z = R \text{ (§. 19. Ar.)}$$

$$G \times Z : g = R : \frac{r}{z} \text{ (§. 9. Ar.)}$$

$$G \times Z : g \times z = R : \frac{r}{z} \times Z \text{ (§. 101. Ar.)}$$

$$\frac{r}{z} \times z = r \text{ (§. 19. Ar.)}$$

$$G \times Z : g \times z = R : r \text{ (§. 9. Ar.)}$$

d. h. Es verhalten sich die Räume, welche die bewegten Körper durchlaufen, wie die Producte, welche entstehen, wenn man die Geschwindigkeiten durch die Zeiten multipliciret.

§. 17.

Wenn man die Wirkung oder die Gewalt eines bewegten Körpers schätzen will, so muß man zweyerley in Erwegung ziehen, nemlich seine Masse und seine Geschwindigkeit. Von zwey Körpern, die sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, ist, wie die Erfahrung lehret, die Gewalt desjenigen die größte, welcher die meiste Masse hat. So kann man z. E. mit einer 12 Pfündigen Kanonkugel eine viel grössere Wirkung hervorbringen, als mit einer 2 Pfündigen, wenn gleich der 2 Pfündigen eben die Geschwindigkeit beygebracht wird, als der 12 Pfündigen. Ja eine genauere Untersuchung zeiget, daß bey gleichen

Geschwindigkeiten die Wirkungen der bewegten Körper ihren Massen völlig proportionirt sind. Bewegen sich hingegen zwey Körper, die gleich viel Masse haben, mit verschiedner Geschwindigkeit, so ist allemal mit der grössern Geschwindigkeit auch die grössere Gewalt oder Wirkung verbunden. Z. E. eine Kugel, wenn sie aus der Flinte geschossen wird, übt eine viel grössere Gewalt aus, als wenn sie mit der Hand geworfen wird, weil man ihr durch das Pulver eine viel grössere Geschwindigkeit, als durch die Hand beybringen kann; und zwar verursacht eine doppelte Geschwindigkeit eine doppelte Gewalt, eine dreyfache Geschwindigkeit eine dreyfache Gewalt u. s. f. oder, welches eben so viel sagen will, die Wirkungen der bewegten Körper verhalten sich in diesem Falle, wenn die Massen gleich sind, wie die Geschwindigkeiten. Sind nun sowohl die Massen als auch die Geschwindigkeiten zweyer Körper ungleich, so müssen sich die Wirkungen derselben in einer zusammengesetzten Verhältnis ihrer Massen und Geschwindigkeiten befinden. Man pflegt daher die Gewalt eines bewegten Körpers überhaupt durch ein Product aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit zu bestimmen.

§. 18.

Nunmehr ist noch die Erklärung der fünften allgemeinen Eigenschaft, nemlich der **Schwere** übrig; welches Wort man heut zu Tage bald in einer engern, bald in einer weitern Bedeutung zu gebrauchen pflegt. In der engern Bedeutung, die sonst nur allein üblich war, versteht man durch die Schwere blos diejenige Eigenschaft der Körper auf unsrer Erde, vermöge welcher sie sich, wenn sie von der Oberfläche der Erde entfernt, und von nichts aufgehalten werden, senk-

recht

recht gegen dieselbe bewegen. In der weitern Bedeutung aber, die seit Neutons Zeiten gebräuchlich ist, welcher bemerkte, daß die Schwere eine allgemeine Eigenschaft der Materie sey, zeigt dieses Wort diejenige Kraft überhaupt an, vermöge welcher alle Theile der Materie in der Körperwelt bey einander zu seyn sich bestreben, oder vermöge welcher ein jedes Theilchen der Materie ein jedes andres Theilchen an sich ziehet. Die Schwere in dieser letzten Bedeutung wird daher auch von einigen die **allgemeine Schwere** oder die **anziehende Kraft** genannt.

§. 19.

Was die eigentliche Ursache dieser anziehenden Kraft sey, und ob dieselbe von einem äussern Druck einer unsichtbaren und flüßigen Materie herrühre oder nicht, ist von den Naturforschern noch nicht völlig ausgemacht worden. Wir wollen uns also in keine Untersuchung dieser Sache einlassen, sondern nur dasjenige kürzlich erwägen, was aus der Erfahrung von dieser allgemeinen Eigenschaft der Körper bekannt ist.

§. 20.

Eine Menge Beobachtungen und Versuche haben gelehrt, daß diese Kraft bey einem Körper desto grösser sey, je mehr Masse derselbe hat, und je näher die Körper, die sich einander anziehen, an einander kommen; daher sie am größten ist, wenn sie einander unmittelbar berühren. Daß also ein Stein, welcher in die Höhe geworfen worden, nicht gegen die Wolken, ohngeachtet diese ebenfalls Materie sind, sondern wieder gegen die Erde zufällt, kömmt daher, weil die Erde vielmehr Masse hat, als die Wolken, und

also den Stein auch vielmehr anziehet. Ein Cubikzoll Gold wiegt mehr, als ein Cubikzoll Eisen, und ein Cubikzoll Eisen mehr, als ein Cubikzoll Holz, weil ein Cubikzoll Gold mehr Masse als ein Cubikzoll Eisen, und ein Cubikzoll Eisen mehr Masse als ein Cubikzoll Holz enthält, daher das Gold mehr als das Eisen, und das Eisen mehr als das Holz von der Erde angezogen wird. Die Sonne hat mehr Masse als die Planeten, welche sich um dieselbe bewegen; die Planeten werden daher von der Sonne beständig angezogen, wodurch es geschieht, daß sie sich niemals aus ihren Laufbahnen um die Sonne entfernen können. Aus eben der Ursache bewegt sich auch der Mond um die Erde, und nicht die Erde um den Mond, weil die Erde viel mehr Masse hat, als der Mond, und ihn daher vielmehr anzieht, als sie von ihm angezogen wird. Daß aber auch der Mond eine anziehende Kraft habe, sieht man unter andern aus dem Aufschwellen und Niedersinken des Wassers im grossen Weltmeere, welches Ebbe und Fluth genannt wird, und sich genau nach dem Stande des Mondes richtet. Zwey Körper, deren Oberflächen uneben sind, hangen nicht zusammen, wenn man sie gleich an einander drücket, weil sie wegen ihrer unebenen Oberflächen einander nur in wenig Puncten berühren, und daher einander nicht so sehr anziehen können, als sie von der Erde angezogen werden. Hingegen findet man, daß zwey Stück Marmor oder Metall stark zusammenhängen, wenn ihre Oberflächen vollkommen eben und glatt gemacht sind, weil sie alsdenn einander in vielen Puncten berühren, und daher einander stärker anziehen, als sie von der Erde angezogen werden.

Zwey-

Zweytes Capitel.

Von den Unterschieden der Körper.

§. 21.

Die natürlichen Körper sind nicht nur in Ansehung der Beschaffenheit ihrer Bestandtheile, von denen uns aber noch eine genaue Kenntniß fehlet, sondern auch in Ansehung der Menge und Lage der Theile, wie auch in Ansehung ihres Zusammenhanges von einander unterschieden, daher man sie in Ansehung dieser Unterschiede, so weit uns dieselben bekannt sind, auf verschiedene Art einzutheilen und zu benennen pflegt.

§. 22.

In Absicht auf die Menge der Theile, die in gleichen Räumen beysammen sind, theilt man die Körper in **dichte** und **lockere** Körper ein. Die **dichten** Körper enthalten mehr Masse oder Materie als die **lockeren** in eben demselben Raume, und haben daher weniger oder kleinere leere Zwischenräume. Vollkommen dichte Körper findet man nicht. Unter den bekannten ist das Gold das allerdichteste. Die Vergrösserungsgläser aber zeigen, daß es noch eine Menge Zwischenräume enthält, die von der Materie des Goldes ganz leer sind. Weil nun die dichten Körper mehr Masse enthalten, als die lockern, so sind jene auch schwerer als diese. Das Gold ist daher der schwerste Körper, weil es der dichteste ist.

§. 23.

In Ansehung des Zusammenhanges der Theile, aus welchen die Körper bestehen, theilt man dieselben

ben in flüßige und feste ein. Flüßig wird ein Körper genannt, wenn der Zusammenhang seiner Theile so geringe ist, daß man dieselben durch die kleinste Bewegung von einander trennen kann. Feste hingegen heissen diejenigen Körper, deren Theile stärker zusammenhängen.

§. 24.

Die festen Körper pflegt man aufs neue in harte und weiche einzutheilen. Harte Körper heissen diejenigen, welche einen grossen Grad der Festigkeit haben, wie z. E. die Steine und Metalle. Weiche Körper hingegen sind diejenigen, denen ein geringer Grad von Festigkeit zukommt, wie z. E. das Fleisch der Thiere. Unter den Körpern, von welchen wir eine Kenntniß haben, ist der Diamant der härteste, ob er gleich von dem Golde an Dichtigkeit übertroffen wird.

§. 25.

Bey einigen Körpern ist der Zusammenhang der Theile so beschaffen, daß man dieselben in eine andre Lage bringen, und die Figur der Körper durch einen äussern Druck verändern kann, ohne daß der Zusammenhang der Theile aufhöret; bey andern hingegen ist keine Veränderung der Figur durch einen äussern Druck möglich, wenn man sie nicht zerbrechen will. Körper von der ersten Art, z. E. Gold, Bley und alle übrigen Metalle, Papier, Seide u. s. w. pflegt man biegsam, und Körper von der andern Art, dergleichen die Steine und Salze sind, spröde zu nennen.

§. 26.

Unter den biegsamen Körpern giebt es einige, welche die Kraft haben, ihre vorige Figur, die durch

einen

einen äussern Druck verändert worden ist, von selbst wieder anzunehmen, sobald dieser Druck aufhöret. Diese Eigenschaft, welche man vornehmlich bey dem Stahl, dem Elfenbein, Fischbein und den Federn der Vögel antrift, wird die **Elasticität, Schnellkraft** oder **Federkraft** genannt.

§. 27.

Endlich pflegt man noch die Körper in Ansehung der Lage ihrer Theile in **durchsichtige** und **undurchsichtige** einzutheilen. In den **durchsichtigen** Körpern, dergleichen z. E. das Glas ist, liegen die Theile so neben und über einander, daß die Lichtstrahlen ungehindert durchgehen können; in den **undurchsichtigen** aber, wozu das Holz, die Metalle, die Erde und viele andere Körper gehören, wird der Durchgang der Lichtstrahlen durch die Lage der Theile verhindert.

Drittes Capitel.

Von dem Lichte.

§. 28.

Das **Licht** ist diejenige flüßige Materie, welche die Körper sichtbar machet; denn daß es nicht eine blosse Eigenschaft sey, erhellt daraus, weil man es auffangen, und seine Bewegung verhindern kann. Worinnen aber eigentlich das Wesen desselben bestehe, ist eine sehr schwere Frage, die unter den Naturforschern noch nicht gänzlich entschieden ist. Einige halten es für einen Ausfluß aus der Sonne und den andern leuchtenden Körpern, andre hingegen sind der Meinung, daß die Materie des Lichts, welche von

ihnen auch **Aether** oder **Himmelsluft** genannt wird, in der ganzen Welt ausgebreitet sey, und daß die Sonne und andere leuchtende Körper das Licht blos dadurch verursachen, indem sie durch die Bewegung ihrer Oberfläche diesen Aether in Bewegung setzen, welche Meynung auch einen sehr grossen Grad von Wahrscheinlichkeit hat.

§. 29.

Die Fortpflanzung des Lichts geschieht allemal in geraden Linien, welche **Lichtstrahlen** genannt werden, wenn es sich durch einen Raum bewegt, der mit Materie von einerley Dichtigkeit angefüllt ist, wie man am deutlichsten sehen kann, wenn man einen solchen Strahl durch eine enge Oeffnung in ein verfinstert Zimmer fallen läßt. Es breitet sich auch nach allen Gegenden gleich stark aus, wird aber in der Nähe stärker empfunden als in der Ferne. Kömmt es aus einer dichtern Materie in eine dünnere, oder aus einer dünnern in eine dichtere, unter einen schiefen Winkel, so weicht es von seinem vorigen Wege ab, welches man die **Strahlenbrechung** oder **Refraction** zu nennen pflegt, und zwar so, daß es sich in dem ersten Falle von der senkrechten Linie, die man aus dem Punkte ziehen kann, wo der Lichtstrahl einfällt, entfernet, in dem andern Falle aber dieser senkrechten Linie nähert. Läßt man einen Lichtstrahl auf eine polirte undurchsichtige Fläche, z. E. auf die Fläche eines Spiegels, unter einen schiefen Winkel fallen, so prallt der Strahl auf der andern Seite wieder zurück, und zwar so, daß der einfallende und zurückprallende Strahl mit der Fläche des Spiegels einerley Winkel macht. Dieses Zurückprallen heißt die **Reflexion** des Lichts. Man bemerkt auch, daß

ein

ein Lichtstrahl seine Richtung verändert, wenn er nahe an der Fläche eines dichten Körpers vorbeystreichet, welches man die Inflexion zu nennen pflegt.

§. 30.

Die Subtilität der Lichtstrahlen ist so groß und erstaunenswürdig, daß man die Nachrichten der Naturforscher für fabelhaft halten würde, wenn man sich nicht durch leichte Erfahrungen und Beweise von der Wahrheit derselben überzeugen könnte. Ich will nur etwas davon anführen. Ein brennendes gemeines Wachslicht, das auf einem Thurme oder auf einer andern Höhe stehet, kann rund herum eine halbe Meile weit gesehen werden. Es muß also in der Oberfläche einer Kugel, deren Radius eine halbe Meile beträgt, nicht ein einziger Punct seyn, auf welcher nicht ein Strahl von dem Lichte fallen sollte. Nun darf man nur die Oberfläche dieser Kugel berechnen, um die Menge der Strahlen, welche aus der Flamme eines einzigen Lichts ausgehen, einigermassen beurtheilen zu können. Wir wollen setzen, ohngeachtet auf einen Quadratscrupel schon viele Strahlen fallen, daß auf jeden Quadratscrupel nur ein einziger Lichtstrahl käme, und daher den Inhalt von der Oberfläche einer Kugel, dessen Diameter eine Meile beträgt, in Quadratscrupeln bestimmen. Weil eine deutsche Meile 20000 Rheinländische Schuh enthält, so muß die Peripherie einer Kugel, dessen Diameter eine Meile ausmacht, $\frac{314 \times 20000}{100}$ d. i. 62800 Schuh, (§. 138. Geom.) und folglich die Oberfläche dieser Kugel

62800 × 20000 d. i.

1256000000 Quadratschuh (§. 216. Geom.)

oder 1256000000000 Quadratzoll
oder 1256000000000000 Quadratlinien
oder 1256000000000000000 Quadratscrupel
enthalten. Es kommen also aus der Flamme eines Lichts, dessen Peripherie kaum 2 Zoll beträgt, 1256 Billionen Strahlen, woraus man auf ihre Subtilität schliessen kann.

Man mache mit einer Nadel ein kleines Loch in ein Papier von der Grösse, daß 20 Menschenhaare darinnen Raum haben, so kann man dadurch, wenn man sich auf den Rücken legt, den halben Himmel übersehen. Man hat durch eine Rechnung, deren Erklärung hier zu weitläuftig seyn würde, gefunden, daß an dem halben Himmel 1000000000000000 d. i. 1000 Billionen Fixsterne neben einander stehen könnten, ohne daß einer den andern bedeckte. Es müste also von jedem Fixsterne wenigstens ein Strahl, und folglich von dem ganzen halben Himmel wenigstens 1000 Billionen Strahlen durch diese kleine Oefnung, welche 20 Haare fassen kann, in das Auge kommen. Der 20ste Theil von 1000 Billionen ist 50 Billionen; folglich ist klar, daß ein Lichtstrahl 50 Billionenmal dünner seyn muß, als ein Menschenhaar.

§. 31.

Die Geschwindigkeit des Lichts ist eben so merkwürdig, als seine Subtilität. Nach den Rechnungen der neuern Astronomen vollendet das Licht seine Wirkung von der Sonne bis auf unsre Erde binnen einer Zeit von 8 Minuten. Sollte also das Licht nach der Meinung des Neutons und vieler anderer Naturforscher in einem Ausfluß aus den leuchtenden

Kör-

Körpern bestehen, so müßten sich die Lichttheilchen in 8 Minuten durch einen Raum von 18920000 deutschen Meilen bewegen, (denn so viel beträgt die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde,) und folglich in einer Minute einen Weg von 2365000 Meilen durchlaufen. Eine Kanonkugel durchläuft bey der allerstärksten Ladung aufs höchste $\frac{1}{10}$ Meile in einer Secunde. Sie würde also in einer Minute nicht mehr als 6 Meilen zurücklegen können. Es verhält sich daher die größte Geschwindigkeit einer Kanonkugel zu der Geschwindigkeit des Lichts, wie

6 : 2365000 (§. 14.)

oder wie 1 : $394166\frac{2}{3}$

Die Geschwindigkeit des Lichts ist also 394166mal grösser, als die größte Geschwindigkeit einer Kanonkugel.

§. 32.

Aus dem Lichte entstehen die Farben, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man einen Lichtstrahl durch eine enge Oeffnung in ein verfinstertes Zimmer fallen und durch ein dreyeckigtes gläsernes Prisma gehen läßt. Fängt man den Strahl mit einem Papiere auf, ehe er durch das Prisma gehet, so bildet er einen weissen Cirkel; im Durchgange aber durch dasselbe wird er in 7 merkliche Strahlen zertheilet, die nicht nur in Ansehung der Refraction, sondern auch in Ansehung der Farbe von einander unterschieden sind, wie der berühmte Neuton zuerst bemerkt hat. Der unterste von diesen sieben Strahlen, der am wenigsten gebrochen wird, ist roth, der 2te goldgelb, der 3te schwefelgelb, der 4te grün, der 5te himmelblau, der 6te purpurfarbig, und der oberste violet. Vereiniget man diese sieben Strahlen

wieder

wieder durch ein Brennglas, so verschwinden alle diese bunten Farben, und man erblickt nichts, als einen weissen Cirkel im Brennpuncte.

§. 33.

Wenn man das verfinsterte Zimmer, in welchem man diesen Versuch machet, mit ein wenig Rauch erfüllet, so wird man bemerken, daß die Theilchen des Rauchs die Farben der gebrochnen Strahlen annehmen; denn in einem rothen Strahl sehen die Rauchtheilchen roth, in blauen blau, und im grünen grün aus, welches auch mit dem Stäubchen, die in der Stube herum fliegen, und mit andern Körpern geschiehet. Ein Körper hat also eine gewisse bunte Farbe, wenn er eine gewisse Art gebrochner Strahlen zurückwirft. Hingegen sieht er weiß aus, wenn er alle Arten von Lichte, und schwarz, wenn er gar keine, oder sehr wenig Lichtstrahlen zurückwirft. Daher kömmt es auch, daß die weissen Kleider im Sommer viel kühler sind, als die schwarzen, weil von jenen alle Arten von Strahlen zurück geworfen, von diesen aber grösstentheils verschlungen werden.

Viertes Capitel.

Von dem Feuer.

§. 34.

Das Feuer ist eine unsichtbare Materie, welche in uns die Empfindung der Wärme erregt. Dasjenige, was wir sehen, wenn ein Körper brennet, nemlich die Flamme, ist nicht das Feuer selbst, son-

sondern bestehet aus den Theilen des brennenden Körpers, welche durch das Feuer so fein aufgelöset werden, daß sie nach Art einer flüßigen Materie sich in die Höhe bewegen.

§. 35.

Unter den neuern Gelehrten behaupten zwar einige, daß das Feuer keine besondere Materie, sondern nur eine Eigenschaft der Körper, nemlich eine schnelle innere Bewegung und Auflösung ihrer Theile sey. Allein da den Gründen, womit diese Meinung unterstützt wird, und deren Anführung hier eine zu grosse Weitläuftigkeit verursachen würde, die gehörige Evidenz fehlet, so ist es zur Zeit noch nicht erwiesen, daß diejenigen irren, welche das Feuer für eine Materie halten.

§. 36.

Weil brennende oder glüende Körper leuchten, und das Sonnenlicht Wärme und Feuer verursacht, so wird die Materie des Lichts und des Feuers von vielen für einerley gehalten. Allein die Erfahrung lehret, daß auch Licht ohne Wärme und Wärme ohne Licht seyn kann; denn faules Holz, einige Würmer und einige Steine leuchten, ohne die geringste Wärme zu verursachen, und siedendes Wasser oder siedendes Oel enthält eine Menge Feuer, und giebt nicht den mindesten Schein von sich; also ist es wahrscheinlicher, daß die Materie des Feuers von der Materie des Lichts unterschieden sey.

§. 37.

Die vornehmsten Eigenschaften des Feuers sind die Flüßigkeit, die Subtilität seiner Theile, die Ela-

Elasticität und Leichtigkeit. Daß es eine flüßige und sehr feine Materie sey, ist daraus klar, weil es alle Körper, auch die allerdichtesten und härtesten, deren Zwischenräume nicht einmal durch die besten Vergröserungsgläser entdeckt werden können, ganz durchdringet, welches unmöglich geschehen könnte, wenn die Theile desselben nicht sehr subtil wären, und einen geringen Zusammenhang unter einander hätten. Von der Elasticität des Feuers können uns die eingeheitzten Stuben überzeugen, welche sich nicht würden erwärmen lassen, und wenn sie erwärmt wären, nicht wieder kalt werden könnten, wenn das Feuer nicht die Kraft hätte, sich nach allen Seiten zu auszubreiten, und wieder zusammen zu ziehen. Die Leichtigkeit des Feuers erhellet daraus, weil das Gewicht einer Masse Eisen von 8 und mehr Pfunden nicht im geringsten zunimmt, wenn es glüend gemacht wird. Es läßt sich aber deswegen nicht behaupten, daß das Feuer ohne alle Schwere sey, denn sonst würde es sich längst von unsrer Erde abgesondert und entfernt haben.

§. 38.

Die vorzüglichste Wirkung des Feuers ist die Ausdehnung der Körper, wodurch auch die Empfindung der Wärme in uns verursacht wird; denn diese entsteht durch nichts anders, als durch die Ausdehnung unsrer Nerven, wenn sie von den Feuertheilen durchdrungen werden. Muschenbroek hat diese Wirkung des Feuers sorgfältig untersucht und gefunden, daß alle Körper, mit welchen er Versuche angestellt, von dem Feuer, so lange es sich in ihnen befunden, in die Länge, Breite und Dicke ausgedehnt worden sind. Er verfertigte sich hierzu ein besondres Instrument,

ment, welches jetzt unter dem Namen eines Pyrometers bekannt ist, und durch welches sich eine Ausdehnung, die nur $\frac{1}{12500}$ Theilchen eines rheinländischen Zolls beträgt, und die er einen Grad nennet, sehr deutlich bemerken läßt. Durch einerley Feuer wurde das Kupfer 89 Grade, das Meßing 100, das Bley 115, das Zinn 153, das Silber 780 Grade ausgedehnt. Es ist auch diese Ausdehnung bey einem stärkern Feuer zwar grösser, als bey einem geringern, aber sonst weder der Anzahl der Flammen, womit man die Metalle erhitzt, noch der besondern Schwere, noch der Ausdehnung, noch dem Zusammenhange dieser Körper proportional, sondern sie richtet sich nach gewissen Regeln, welche der Fleiß der Naturforscher bis jetzt noch nicht hat entdecken können.

§. 39.

Diese Ausdehnung, welche durch das Feuer verursacht wird, ist bey den flüßigen Körpern noch leichter wahrzunehmen, als bey den festen; denn wird ein Gefäß, an welches eine enge Röhre befestiget ist, mit Wasser gefüllt, und in die Wärme gebracht, so steiget das Wasser darinnen den Augenblick in die Höhe, welches nicht geschehen könnte, wenn es nicht von der Wärme ausgedehnt würde. Diese Beobachtung hat Gelegenheit zu der Erfindung der Thermometer gegeben, welches, wie bekannt, Werkzeuge sind, durch deren Hülfe man wissen kann, ob die Wärme und Kälte der Luft sich verändert habe, oder nicht. Den Namen Thermometer, d. i. Wärmemesser, verdienen sie zwar im eigentlichen Verstande nicht, weil sie nicht anzeigen, wie vielmal die Wärme grösser oder kleiner geworden, sondern nur,

ob

ob sie grösser oder kleiner geworden sey; denn die Ausdehnung der Körper ist dem Wachsthume der Wärme nicht proportional, wie wir schon im vorigen Paragraphen erinnert haben. Unterdessen sind sie doch sowohl bey physikalischen Beobachtungen, als auch im gemeinen Leben von grossem Nutzen.

§. 40.

Man pflegt in den Thermometern, um die Grösse der Kälte und Wärme einigermassen durch Zahlen ausdrücken zu können, den Raum, durch welchen sich der Weingeist oder das Queckſilber in der Röhre bewegt, in gleiche Theile zu theilen, und einen solchen Theil einen **Grad** zu nennen. Da nun diese Eintheilung willkührlich, und daher nicht bey allen Thermometern einerley ist, so wird ein jeder leicht einsehen, daß man keinen deutlichen Begriff von einem solchen Grade, und folglich auch nicht von der Beschaffenheit der Wärme oder Kälte, die dadurch angezeigt wird, haben kann, wenn man nicht weiß, wie das Thermometer, nach welchem die Grade bestimmt worden, eingetheilt ist. Unter denen, welche man jetzt zu verfertigen pflegt, sind die **Reaumürischen, Fahrenheitschen** und **Delislischen** die gewöhnlichsten, welche diese Namen von ihren Erfindern erhalten haben. Bey dem Reaumürischen wird die Glasröhre, nachdem sie mit Weingeist oder Queckſilber gefüllt worden ist, erstlich in gefrierendes und alsdenn in siedendes Wasser gesetzt. Der Punct, wo die hineingegossene Materie im frierenden Wasser stehet, welchen man den natürlichen Eispunct zu nennen pflegt, wird auf der Tafel, an welche man die Röhre befestiget, mit 0; der andre Punct, welcher die Hitze des siedenden Wassers anzeigt, mit 80 bemerkt,

und

und hierauf der ganze Raum zwischen diesen beyden Puncten in 80 gleiche Theile oder Grade getheilt, welche Theile auch unter den Eispunct getragen werden, so weit es die Länge der Röhre erlaubt.

In dem Delisliſchen Thermometer ist nicht nur die Eintheilung, sondern auch die Ordnung im Zählen, von der vorigen ganz unterschieden; denn in diesem wird nicht der Eispunct, sondern der Punct des siedenden Wassers mit o bemerkt, und der Raum zwischen beyden Puncten in 150 Grade getheilet, welche man bis an das unterste Ende der Röhre in eben der Ordnung fortzählet.

Bey den Fahrenheitischen Thermometern wird o an denjenigen Ort gesetzt, wo das Queckſilber in einem Gemische von Schnee und Salmiak stehet, welches eine viel grössere Kälte giebt, als die Kälte des frierenden Wassers ist. Der Raum zwischen diesem Puncte, welchen man den künstlichen Eispunct zu nennen pflegt, und dem Orte, wo das Queckſilber in siedenden Wasser stehen bleibt, wird in 212 Grade getheilt, wodurch der Raum zwischen dem künstlichen und natürlichen Eispuncte 32 solcher Theile erhält, die auch rückwärts unter den künstlichen Eispunct bis an die Kugel getragen werden.

Wenn man also die Wärme oder Kälte nach dem Reaumüriſchen oder Fahrenheitiſchen Thermometer angezeiget, so muß man nicht nur die Zahl der Grade angeben, sondern auch diesen Umstand bemerken, ob es ein Grad über oder unter o sey; daher man auch bey meteorologiſchen Beobachtungen jene Grade mit + und diese mit — zu bezeichnen pflegt.

§. 41.

Wenn die Bewegung der Feuertheile, und folglich die Ausdehnung, welche dadurch in den Körpern verursacht wird, sehr zunimmt, so werden endlich die ausgedehnten Theile der Körper gar von einander abgesondert. Feste Körper verwandeln sich daher entweder in flüßige oder in feste Körper von anderer Art, und flüßige Körper lösen sich in Dünste auf, welche wegen ihrer Feinheit und Leichtigkeit in der Luft in die Höhe steigen. Ueberhaupt aber ist kein Körper bekannt, welcher dem Feuer widerstehen könnte. Selbst der festeste unter den festen Körpern, der Diamant, kann durch die Gewalt des Feuers in einen Dampf verwandelt werden, wie man in den neuern Zeiten durch verschiedene Versuche bewiesen hat. Der Asbest, den man immer noch unverbrennlich nennet, ist nur unverbrennlich im Küchenfeuer. Durch die Hitze der Sonnenstrahlen kann man ihn in dem Brennpuncte eines Brennspiegels binnen wenig Secunden in gelblichtes Glas verwandeln.

§. 42.

Sobald die Feuertheilchen, welche die Theile eines Körpers ausgedehnt haben, wieder aus dem Körper herausgehen, so müssen die Theile des Körpers wieder näher an einander kommen, weil sie nun stärker von einander angezogen werden. Dieses ist die Ursache, warum die Kälte, welche durch nichts anders, als durch die Abnahme der Wärme entsteht, die Körper zusammenziehet, und daher ihre Grösse vermindert.

Fünftes Capitel.

Von der Luft.

§. 43.

Die Luft ist diejenige flüßige Materie, die wir beständig einathmen, und die wir zwar nicht sehen, aber doch fühlen können, so oft wir die Hand gegen das Gesicht bewegen. Diejenige Luft, welche uns umgiebt, ist niemals ganz rein, sondern mit einer Menge wäßriger und andrer Dünste erfüllet, von welchen verschiedene Wirkungen entstehen, die man im gemeinen Leben oft fälschlich der Luft zuzuschreiben pflegt. Es ist so gar lange nicht, daß man ihre wahre Beschaffenheit etwas genauer hat untersuchen können; denn erst im vorigen Jahrhunderte ist das zu dieser Untersuchung nöthige Instrument, welches man eine Luftpumpe zu nennen pflegt, und durch dessen Hülfe man die Luft den Körpern benehmen kann, von einem Magdeburgischen Bürgermeister, Otto von Gnerike, erfunden worden.

§. 44.

Die Theile der Luft sind nicht so subtil, wie die Theile des Lichts und des Feuers, ja sie sind nicht einmal so fein, wie die Theile des Wassers. Denn die Lichttheilchen gehen ungehindert durch das Glas, und die Feuertheilchen durch die dichtesten Metalle. Das Wasser kann durch Holz, Leder, und durch noch feste re Körper gepreßt werden, durch welche man die Luft nicht bringen kann.

§. 45.

Vor Erfindung der Luftpumpe hatte man keine genaue Kenntniß von der Schwere und Elasticität der

Luft, von welchen beyden Eigenschaften die meisten Wirkungen derselben herrühren; daher es auch nicht zu verwundern ist, daß man viele Erscheinungen in der Natur, die nichts als Wirkungen der Luft sind, nicht recht erklären konnte. Die Schwere der Luft aber läßt sich durch Abwägen erkennen. Denn eine hohle Kugel wird viel leichter, wenn man die Luft aus derselben pumpet, und zwar beträgt die Schwere von einem Cubikschuh Luft, wie man durch dergleichen Abwägen gefunden hat, 1 Unze und 27 Gran nach Apotheker Gewichte. Die Schwere der Luft ist also über 900 mal geringer, als die Schwere des Flußwassers, wovon 1 Cubikschuh Rheinl. Maaß 64 Pfund wieget.

§. 46.

Wenn man unter die Glocke einer Luftpumpe eine zusammengedrückte und fest zugebundene Blase legt, und die Luft aus der Glocke herauspumpt, so schwillt die Blase stark auf; läßt man wieder Luft in die Glocke, so fällt auch die Blase wieder zusammen. Dieses Ausdehnen und Zusammenziehen der Blase aber kann von keinem andern Körper als von der Luft herrühren, die sich zwischen den Falten der Blase befindet, weil sonst nichts darinnen ist. Folglich ist klar, daß die Luft elastisch seyn, ja einen grossen Grad von Elasticität haben müsse, welches auch daraus erhellt, weil sich dieselbe sehr zusammendrücken läßt, und wenn der Druck aufhöret, durch ihre eigene Kraft wieder ausbreitet, wie man bey den gemeinen Windbüchsen sehen kann. (§. 26.)

§. 47.

Aus der Schwere und Elasticität der Luft entstehet ihr Druck, welcher bald grösser bald geringer ist,

ist, nachdem die darinnen schwimmenden Dünste und andre Ursachen ihre Schwere oder Elasticität verändern. Die Grösse dieses Drucks beträgt so viel, daß eine Wassersäule, welche 32 Rheinl. Fuß hoch ist, in einer oberwärts verschlossenen, unten aber offenen Röhre dadurch erhalten wird. Füllt man daher eine gläserne Röhre, die ohngefehr drey Schuh lang, und an dem einen Ende zugeschmolzen ist, mit Queckſilber, dessen Schwere 14 mal grösser ist, als die Schwere des Wassers, so läuft, wenn man die Röhre umwendet, und mit dem offenen Ende in ein Gefäß mit Queckſilber steckt, nur ein geringer Theil davon heraus; der größte übrige Theil bleibt in einer Höhe von 28 bis 29 Zoll mit der Luft im Gleichgewichte. Der erste, welcher dieses beobachtete, war ein Italiänischer Gelehrter, mit Namen **Torricelli**, daher man eine solche mit Queckſilber gefüllte Röhre eine **Torricellianische Röhre**, und weil man dadurch die Veränderung des Druckes der Luft, mit welcher gemeiniglich die Veränderungen der Witterung verbunden sind, erfahren kann, auch ein **Barometer** oder **Wetterglas** zu nennen pflegt.

§. 48.

Da die Schwere des Wassers bekannt ist, so kann man das Gewicht einer Luftsäule, womit eine Fläche gedrückt wird, leicht finden, wenn man das Gewicht einer Wassersäule sucht, welche eben die Grundfläche und eine Höhe von 31 Schuh hat. Gesetzt, die Grundfläche einer solchen Wassersäule, die man sich prismatisch, oder cylindrisch vorstellen kann, betrüge 15 Quadratschuh, so würde ihr körperlicher Inhalt 15×31, d. i. 465 Cubikschuh seyn. (§. 199. 200. Geom.) Da nun 1 Cubikschuh Was-

ser 64 Pfund wiegt, und folglich 465 Cubikschuh, 465 × 64, d. i. 29760 Pfund wiegen müssen; so ist klar, daß der Druck einer Luftsäule über einer Fläche von 15 Quadratschuhen so viel beträgt, als der Druck eines Gewichts von 29760 Pfunden; und so groß ist auch ohngefehr der Druck der Luft auf die Oberfläche eines Menschen, die bey Personen von mittelmäßiger Grösse schon 15 Quadratschuh ausmacht. Daß aber durch diesen grossen Druck der menschliche Körper nicht zerquetscht wird, kömmt daher, weil die in den innern Gefässen und Säften verschlossene Luft eben so stark der äussern Luft entgegen drückt, wodurch die Zerreissung der Theile verhindert wird.

§. 49.

In der Luft entstehet der **Schall**, welcher nichts anders ist, als eine zitternde Bewegung der Lufttheilchen, welche durch die Bewegung eines elastischen Körpers verursacht, und vermittelst des Gehörs empfunden wird. Daß aber die Luft zum Schalle nöthig sey, erhellet daraus, weil eine Glocke keinen Klang von sich giebt, wenn sie im luftleeren Raume angeschlagen wird.

§. 50.

Von den neuern Naturforschern ist die Geschwindigkeit des Schalles mit grossem Fleisse untersucht worden. Nach den Beobachtungen der Französischen Academisten durchläuft der Schall in einer Secunde 1070 Pariser Fuß, welche 1108 Fuß Rheinl. Maaß ausmachen, und folglich in 21 Secunden ohngefehr eine deutsche Meile. Da nun diese Geschwindigkeit gegen die Geschwindigkeit des Lichts sehr geringe ist, so darf man sich nicht wundern, daß man den Blitz eher

sieht,

ſieht, als man den Donner hört, wenn das Gewitter von dem Orte, wo man ſich befindet, noch entfernt iſt.

§. 51.

Wenn der Schall an einen feſten und unbeweglichen Körper anſtößt, ſo wird er zurückgeworfen. Iſt nun ein Körper, welcher den Schall zurückwirft, ſo weit von uns entfernet, daß der zurückgeworfene Schall an dem Orte, wo der urſprüngliche gehört wird, empfunden werden kann, wenn die Empfindung des urſprünglichen geendiget iſt, ſo können wir einerley Schall mehr als einmal hören. Dieſe Vervielfältigung des Schalls durch das Zurückprallen wird ein **Echo** oder **Wiederſchall** genannt.

Sechſtes Capitel.

Von dem Waſſer.

§. 52.

Das **Waſſer** iſt ein ſichtbahrer, flüßiger, durchſichtiger Körper, ohne Farbe, Geſchmack und Geruch, welcher in der Kälte ſeine Flüßigkeit verlieret, in der Wärme aber ohne Veränderung ſeines Weſens dieſelbe wieder erhält. Es wird aber nirgends ganz rein gefunden, ſondern iſt allemal mit andern Materien, z. E. mit ſalzichen, metalliſchen und irrdiſchen Theilchen vermiſcht, von welchen die Farbe und der Geſchmack herrührt, die man bey manchen Arten von Waſſer bemerkt. In Anſehung der Oerter, wo man es findet, wird es in **Regen-Quell-Fluß-Brunnen-Meer-** und **Sumpfwaſſer** eingetheilt. Unter dieſen iſt das Meerwaſſer das ſchwerſte; denn ein Cubikſchuh Meerwaſſer wiegt 70 Pfund

hingegen ein Cubikschuh Flußwasser nur 64 Pfund, und das Regenwasser noch etwas weniger.

§. 53.

Ohngeachtet aber das Wasser fast 900 mal schwerer, und folglich auch dichter ist, als die Luft, so müssen doch die kleinen Theile, aus welchen das Wasser bestehet, viel feiner seyn, als die Theile der Luft, weil sie, wie schon im vorigen Capitel bemerkt worden ist, durch die Zwischenräume der dichtesten Metalle dringen, durch welche man die Luft mit der größten Gewalt nicht treiben kann. Daher ist es nicht zu verwundern, daß die Wassertheilchen so leicht in die Pflanzen und in andre Körper kommen, auch in einigen z. E. in den Salzen eine gänzliche Auflösung ihrer Theile verursachen können.

§. 54.

Diese Subtilität der Wassertheilchen ist zugleich mit einer ausserordentlichen Härte verbunden, wie man unter andern aus den Florentinischen Versuchen sehen kann. Man füllte goldne, silberne und andre metallne Gefässe mit Wasser, verschloß dieselben sorgfältig, und brachte sie unter die Presse oder auf den Ambos; allein weder die Gewalt der Presse noch des Hammers war im Stande, das Wasser in einen engern Raum zusammenzudrücken; Denn war durch die Vermehrung der äussern Gewalt der innere Raum der Gefässe ja ein wenig kleiner gemacht worden, so fand man, daß eben so viel Wasser durch die Zwischenräume der Metalle durchgeschwitzt war, als die Verminderung des innern Raums der Gefässe austrug. Aus dieser Härte der Wassertheilchen läßt sich also die Ursache einsehen, warum sich ein flaches

Stück

ck Holz, wenn man mit der flachen Seite auf die fläche des Wassers schläget, eben so spaltet, als n man damit auf einen festen Körper geschlagen , und warum die Bleykugeln, wenn man sie un: inem sehr schiefen Winkel auf das Wasser schießt, allen und platt werden.

§. 55.

Es ist aber wohl zu merken, daß sich nur als: n das Wasser in keinen engern Raum bringen läßt, n man es in einerley Grad der Wärme erhält, n durch die Kälte wird es eben so gut, wie andre per zusammengezogen, und durch die Hitze wieder gedehnt; und zwar beträgt der Unterschied des ums, welchen es einnimmt, wenn es zu frieren ingt, und desjenigen, welchen es erfüllt, wenn siedet, $\frac{1}{26}$ seiner größten Ausdehnung. Das kwürdigste hierbey ist, daß die Kälte das Wasser so lange zusammenziehet, als es noch flüßig ist; n sobald es zu Eise wird, fängt es wieder an sich zudehnen, und diese Ausdehnung nimmt mit der te beständig zu; daher das Eis auf dem Wasser immet, weil es leichter ist, als eben so viel flüßi: Wasser. Diese Ausdehnung ist auch die Ursa: warum Gefässe, welche voll Wasser sind, sehr zerspringen, wenn das Wasser darinnen gefrieret. an hat durch viele Versuche gefunden, daß die sdehnung des gefrornen Wassers so groß ist, daß ar meßingene und eiserne Gefässe dadurch zerbro: n werden, deren Dicke beynahe einen Zoll beträgt.

§. 56.

Aus den §. 54. angeführten Florentinischen rsuchen haben einige Naturforscher geschlossen,

daß die Theilchen des Wassers nicht elastisch seyn müssen, weil sie sich nicht zusammen drücken lassen. Allein dieser Schluß scheint wohl nicht vollkommen richtig zu seyn; denn eigentlich muß man hier nur folgendergestalt urtheilen: weil sich das Wasser in Gefässen von den dichtesten Metalle nicht zusammendrücken läßt, so ist es entweder unmöglich, daß es zusammengedrückt werden, und folglich elastisch seyn kann, oder die Kraft, welche dazu erfordert wird, muß grösser seyn, als die Kraft, womit die dichtesten Metalle zusammenhängen. Welches von beyden hier nun Statt findet, muß auf andere Art ausgemacht werden. Die Elasticität des Wassers läßt sich aber deswegen behaupten, weil es, wie Nollet durch verschiedene Versuche gezeigt hat, den Schall fortpflanzet, welches nur elastische Körper thun können, und weil es, wie andere elastische Materien, von festen Körpern, an welche es geworfen wird, zurükprallet, wenn auch diese festen Körper unelastisch sind, und es also nicht durch ihre eigene Elasticität zurückwerfen können.

§. 57.

Durch das Feuer wird das Wasser in **Dünste** aufgelöset, die so fein sind, daß sie durch die geringste Bewegung der Luft und der Wärme in die Höhe getrieben werden, und in der Athmosphäre hängen bleiben. Die Elasticität der warmen Dünste ist sehr groß, und wird durch die Vermehrung der Wärme immer grösser. Muschenbroek hat durch eine besondere Maschine dieselbe untersucht und gefunden, daß die Wirkung erhitzter Dünste noch stärker ist, als die Wirkung des entzündeten Schießpulvers; denn Dünste, welche durch ein heftiges Feuer aus 13 Gran

Wasser

aſſer entſtanden waren, hatten eine ſolche Gewalt, 3 Pfund Waſſer dadurch 50 Fuß hoch getrieben rden, zu welcher Höhe 13 Gran Schießpulver in em kleinen Mörſer nur eine Laſt von 4 Unzen und Drachmen bringen konnten.

Siebendes Capitel.

Von der magnetiſchen Materie.

§. 58.

Die magnetiſche Materie hat ihren Namen von einem eiſenhaltigen Steine, den man in erſchiedenen Nordiſchen und andern Bergwerken ndet, und **Magnet** nennt, deſſen merkwürdigen Eigenſchaften dieſe ſind, daß er Eiſen an ſich ieht, und wenn er an einem Faden aufgehangen wird, ſich immer mit einerley Seite gegen Mitternacht kehret.

§. 59.

Dieſe anziehende Kraft äuſſert ſich zwar in allen Theilen des Magnets, aber nicht mit einerley Stärke; am größten iſt ſie in den beyden Puncten, wovon ſich der eine gegen Mitternacht und der andere gegen Mittag kehret, wenn er frey hänget. Dieſe beyden Puncte pflegt man die **Pole**, und die gerade Linien, welche man ſich zwiſchen denſelben vorſtellt, die **Axe** des Magneten zu nennen. Derjenige Pol, welcher ſich nach Mittag kehret, heißt der **Südpol**, und der nach Mitternacht gerichtet iſt, der **Nordpol**. Man kann aber dieſe beyden Pole leicht entdecken, wenn man den Magnet mit Eiſenfeilſpänen beſtreuet, und Achtung giebt, wo ſich dieſelben am häufigſten anhängen.

§. 60.

Wenn man einen Magnet armirt, daß heißt, wenn man die Seiten, wo sich die Pole befinden, abschleift, und dieselben mit eisernen Platten einfaßt, an deren jeder ein würfelförmiger Fuß gemacht wird, welchen man den **künstlichen Pol** nennt, so wird seine Wirkung dadurch überaus vermehret; denn nach der Erzählung eines Naturforschers hat ein Magnet, der ohne Armatur nur 54 Gran Eisen tragen konnte, armirt fast 864 Gran getragen.

§. 61.

Ein Magnet zieht auch einen andern Magneten an sich, aber nur alsdenn, wenn sein Südpol gegen den Nordpol, und sein Nordpol gegen den Südpol des andern gerichtet wird. Denn sind die Pole, die einerley Namen führen, gegen einander gekehrt, so stossen sie einander von sich, wie man sehr deutlich sehen kann, wenn man den einen Magneten an einen Wagebalken aufhängt, und den andern darunter hält.

§. 62.

Alles Eisen, welches mit einem Magneten bestrichen wird, erhält die Eigenschaften desselben, und zieht nicht nur andres Eisen an sich, sondern richtet sich auch, wenn es frey hängt, gegen Mitternacht und Mittag, wie man an den **Magnetnadeln** sehen kann, welche nichts anders sind, als dünne Nadeln von Eisen oder Stahl, die man mit Magnet bestrichen hat. Es kann aber auch das Eisen durch Schlagen und durch andere Mittel ohne Magnet magnetisch gemacht werden.

§. 63.

Der Gebrauch und Nutzen der Magnetnadel iſt hinlänglich bekannt, daher es überflüßig ſeyn würde, weitläuftig davon zu handeln. Der einzige Umſtand aber verdient noch angemerkt zu werden, daß der Magnet und daher auch die damit beſtrichene Nadel nicht überall genau Norden und Süden anzeiget, ſondern gemeiniglich von der wahren Mittagslinie ein wenig abweichet, welches man ihre **Declination** zu nennen pflegt. Dieſe Declination iſt auch nicht an allen Orten, ja auch nicht zu allen Zeiten einerley. Zu London hat die Veränderung in der Declination binnen etlichen Jahren oft 4 bis 6 Grad ausgetragen. Es ſteht auch an wenig Oertern die Magnetnadel recht horizontal. In den meiſten Gegenden ſteht derjenige Theil, welcher nach Norden zeiget, etwas niedriger als der entgegengeſetzte. Dieſe Abweichung von der Horizontallinie heißt die **Inclination** der Magnetnadel.

§. 64.

Von der Natur der magnetiſchen Materie ſelbſt, von welcher die jetzt angeführten Eigenſchaften des Magnets verurſacht werden, läßt ſich noch ſehr wenig mit Gewißheit ſagen. Daß es aber wirklich eine ſolche unſichtbare Materie giebt, die aus dem einen Pole eines Magnetes in den andern beſtändig ſtröhmet, und welche einige Naturforſcher in Zweifel ziehen, erhellet aus folgendem Verſuche. Wenn man auf ein Blatt Papier Eiſenfeilſtaub ſtreuet, und unter dem Papiere einen Magneten fortziehet, ſo erblickt man verſchiedene Wirbel oder Kreiſe, die durch den Feilſtaub gebildet werden. Wie wären aber dieſe

se Wirbel möglich, wenn sie nicht von der kreisförmigen Bewegung einer Materie enstehen sollten?

§. 65.

Wenn man einen Magneten in ein metallenes Gefäß einschließt, oder ihn unter eine gläserne Glocke setzt, und den Raum darunter vermittelst der Luftpumpe luftleer macht, so wirkt er doch in eine eiserne Nadel, die von aussen an das Gefäß oder die Glocke gebracht wird, woraus also erhellet, daß die magnetische Materie durch Metall und Glas dringet, und daher die Theile derselben viel feiner als die Theile der Luft seyn müssen. Das übrige was man von der magnetischen Materie und von der Art und Weise, wie dadurch die Wirkungen des Magnets entstehen, hin und wieder in den Schriften der Naturforscher findet, gründet sich grösstentheils auf Muthmassungen und Schlüsse, die für unsre jungen Leser viel zu weitläuftig seyn würden.

Achtes Capitel.

Von der electrischen Materie.

§. 66.

Wenn Bernstein, Glas, Siegellack oder Schwefel gerieben wird, so bemerkt man an diesen Körpern ein Licht und eine Bewegung einer flüßigen Materie; wodurch leichte Sachen, z. E. Goldblättchen und zerschnittenes Papier angezogen und zurückgestossen werden. Diese Erscheinung wird die **Electricität** und die flüßige Materie, durch deren Bewegung dieselbe entstehet, die **electrische Materie** genannt,

genannt, weil man sie zuerst an dem Agt- oder Bernsteine, welcher im lateinischen Electrum heisset, beobachtet hat.

§. 67.

Es lassen sich aber nicht alle Körper durch Reiben electrisch machen; denn ausser den vorhin angeführten haben nur noch Porcellan, Seide und sehr wenig andere diese Eigenschaft, daher man sie an und für sich electrische Körper nennt. Hingegen können die meisten übrigen Körper dadurch electrisch gemacht werden, wenn man sie mit einem solchen Körper verbindet, der durch Reiben electrisch geworden ist; man muß sie aber, wenn die Electricität merklich werden soll, auf solchen Körpern ruhen lassen, die an und für sich electrisch sind. Man theilt daher die Electricität in die ursprüngliche oder eigenthümliche, und in die mitgetheilte oder fortgepflanzte ein. Die ursprüngliche ist diejenige, welche durch das Reiben, und die mitgetheilte Electricität diejenige, welche durch die Verbindung mit einem an und für sich electrischen Körper entstehet.

§. 68.

Die mitgetheilte Electricität wird desto merklicher, je grösser der Körper, welcher gerieben wird, und je grösser die Geschwindigkeit ist, womit man reibet. Man pflegt daher insgemein zu dem Electrisiren Kugeln oder Cylinder von Glas zu erwählen, und dieselben durch ein Rad in Bewegung zu setzen, woraus die sogenannten Electrisir-Maschinen bestehen; denn die übrigen ursprünglich electrischen Körper, z. E. Siegellack und Schwefel haben eine viel geringe-

re Festigkeit, und vertragen daher kein so heftiges Reiben, wie das Glas.

§. 69.

Die größte Verstärkung der Electricität bemerkt man, wenn ein Drath, welcher in einer gläsernen Flasche hänget, die mit Wasser, Queckſilber, Feilspänen oder gestossenem Glase gefüllt ist, electrisiret wird. Denn wenn man mit der einen Hand die Flasche anfaßt, und mit der andern Hand dem electrisirten Drathe sehr nahe kömmt, so entsteht zwischen dem Finger und dem Drathe ein grosser knallender Funke, welcher mit einem Schmerz in den Finger, und bisweilen mit einer Erschütterung der Nerven durch den ganzen Körper verbunden ist. Ein solcher electrischer Funken zündet auch gewärmten Weingeist und semen Lycopodii, aber weder Schießpulver, noch Zunder, noch andre Materien, die sich sonst sehr leicht entzünden lassen. Selbst das Thermometer wird durch die größten Funken nicht zum Steigen gebracht.

§. 70.

Es läßt sich aber die Electricität nicht nur im luftvollen, sondern auch im luftleeren Raume erregen, und die electrische Kraft dringet durch Siegellack, Glas und andre Materien aus dem luftvollen in den luftleeren, und aus dem luftleeren in den luftvollen Raum. Wird ein spitziger metallischer Körper im luftleeren Raume electrisirt, so sieht man, wenn man das Zimmer verfinstert, aus seiner Spitze leuchtende Strahlen von verschiednen Farben ausströhmen, die sich nach divergenten Linien ausbreiten. Man kann diese Strahlen auch in dem luftvollen Raume, aber nur nicht so deutlich wahrnehmen.

§. 71.

§. 71.

Die Fortpflanzung der mitgetheilten Electricität geschieht in sehr kurzer Zeit, denn wenn man das eine Ende eines nassen Seiles, welches 5000 Schuh lang, und an seidene Schnüren befestiget ist, mit einem electrisirten Körper berühret, so wird auch in eben dem Augenblicke das andre Ende desselben electrisch.

§. 72.

Aus diesen jetzt angeführten Erfahrungen läßt sich also einigermassen einsehen, worinnen die electrische Materie bestehen müsse; denn zu einer vollkommenen Erkenntniß ihrer Natur hat selbst der Fleiß der größten Naturforscher noch nicht gelangen können. Sie muß nemlich eine sehr flüßige, subtile, elastische, und den Körpern, an welchen sich die Electricität äussert, eigenthümliche Materie seyn, welche bey den electrisirten Körpern in einer schnellen Bewegung, bey den unelectrisirten aber in Ruhe ist, und aus Theilen bestehet, in welchen das Licht auf verschiedne Art gebrochen und zurückgeworfen wird. Ein Körper wird daher electrisiret, wenn seine electrische Materie in eine solche Bewegung gesetzt wird, daß sie sich ausbreiten kann. Bey denjenigen Körpern, die nicht anders als durch Reiben electrisirt werden können, müssen die Theile der electrischen Materie entweder unter einander selbst oder mit ihren Körpern einen weit stärkern Zusammenhang haben, als bey solchen Körpern, die ohne Reiben sich electrisiren lassen.

§. 73.

Viele halten die electrische Materie und die Materie des reinen Feuers für einerley, weil man durch

einen electrischen Funken Weingeist und semen Lycopodii anzünden kann; allein da andre sehr brennbare Dinge, z. E. Zunder und Kohlen, die sich sonst durch die geringsten Flammen oder Funken anzünden lassen, durch die größten electrischen Funken nicht zum Glimmen zu bringen sind, auch die Höhe des Quecksilbers im Thermometer nicht im geringsten verändert wird, (§. 68.) so muß wohl die electrische Materie von der Materie des Feuers unterschieden seyn. Es folgt nicht einmal aus dem angeführten Versuche, daß die electrische Materie mit viel Feuertheilen vermischt seyn müsse. Denn da die Theile derselben sehr subtil sind, und mit einer grossen Geschwindigkeit wirken, so läßt sich gar wohl begreifen, wie sie die in den angezündeten Dingen verschlossene Feuertheilchen in Bewegung bringen können. Wer weiß nicht, daß man auch ohne Feuer blos durch Vermischung flüßiger Körper, oder durch eine geschwinde Bewegung Feuer erregen kann?

Neuntes Capitel.

Von der Erde.

§. 74.

Durch das Wort **Erde** soll hier nicht der ganze Weltkörper, welchen wir bewohnen, auch nicht, der mit vielen Materien vermischte Theil desselben, in welchem die Pflanzen wachsen, und den man von Sand, Steinen, und Metallen unterscheidet, sondern die unauflösliche und aus homogenen Theilen bestehende Materie verstanden werden, welche man auch

die

die reine Erde zu nennen, und unter die Elemente zu rechnen pflegt.

§. 75.

Diese reine und elementarische Erde, welche als die Grundlage aller festen Körper angesehen werden kann, findet man nicht unmittelbar durch Graben; denn alle ausgegrabene Erde, von welcher man nur einige Kenntniß hat, ist mit sehr vielen heterogenen Theilen vermischt; sondern man erhält sie durch chymische Auflösung thierischer, vegetabilischer und andrer Körper. Sie ist weiß, undurchsichtig, hat weder Geschmack noch Geruch, läßt sich leicht zerreiben und vom Wasser durchdringen, aber weder von dem Wasser noch von einer andern flüßigen Materie weiter auflösen. Sie besteht aus so biegsamen Theilen, daß man aus ihr einen Teig machen, und ihr alle beliebige Gestalten geben kann. Im größten Feuer glüet sie nur, aber schmelzet nicht, daher man sie bey chymischen Arbeiten zu Gefässen gebraucht, welche sehr heftiges Feuer vertragen müssen.

§. 76.

Aus diesen jetzt angeführten Kennzeichen, die man durch sorgfältige Versuche entdeckt hat, erhellet, daß die reine Erde von allen andern festen Körpern unterschieden ist. Reaumür ließ Sandkörner zu so feinem Staube zermalmen, daß sie durch das Gefühl von den Erdstäubchen nicht zu unterscheiden waren; aber dennoch konnte er aus diesem Sandstaube, den er mit Wasser befeuchtete, keinen Teig machen, der sich kneten ließ, wie ein Teig aus reiner Erde.

§. 77.

Diese Erde ist auch im Feuer viel beständiger, als das Gold. Durch die Heftigkeit des Sonnenfeuers läßt sich das Gold, vermittelst eines Brennspiegels in Glas verwandeln. Wird dieses Glas noch eine Zeitlang im Brennpuncte erhalten, so entsteht daraus eine Erde, die sich reiben, aber durch keine fortgesetzte Hitze mehr schmelzen läßt. Dieses ist die Ursache, warum man die reine Erde in die Zahl der elementarischen Materien gesetzt hat.

Zehntes Capitel.

Von den Lufterscheinungen.

§. 78.

Durch die Hitze der Sonnenstrahlen und durch die im Innern der Erdkugel befindliche Wärme werden nicht nur eine Menge Wassertheilchen, sondern auch ölichte, salzartige, schwefelartige und andre Materien in feine Dünste aufgelöset, welche beständig von der Erde in die Höhe steigen, und sich mit der Luft vermischen. Diese mit dergleichen wäßrigen und andern Dünsten vermischte Luft, welche unsre Erdkugel überall umgiebt, wird die **Atmosphäre** oder der **Dunstkreis** der Erde, und eine merkliche Veränderung in derselben eine **Lufterscheinung** genannt.

§. 79.

Die Lufterscheinungen werden in **luftige, wäßrige, feurige** und **glänzende** eingetheilt. Die luftig-

luftigen bestehen in einer merklichen Bewegung der ganzen Luftmasse, und werden auch **Winde** genannt. Die **wäßrigen, feurigen** und **glänzenden** sind blos in Ansehung der Dünste, wodurch die Veränderung in dem Dunstkreise verursacht wird, oder in Ansehung der Art und Weise, wie diese Veränderung geschiehet, von einander unterschieden.

§. 80.

Die Winde, welche man in Ansehung ihrer Stärke in **gewöhnliche Winde** und **Sturmwinde** einzutheilen pflegt, entstehen theils durch eine plötzliche Veränderung der Wärme und Kälte der Luft, wodurch ihr Gleichgewicht aufgehoben wird, theils durch die aus den Klüften und der Oberfläche der Erden aufsteigende elastische Dünste, wodurch ein Theil der Atmosphäre ausgedehnt, und in eine andre Gegend getrieben wird, theils durch andre Ursachen, die noch unbekannt sind.

§. 81.

Die Geschwindigkeit der Winde ist sehr unterschieden. Die gewöhnlichen Winde, welche selten weit kommen, durchlaufen in einer Stunde bisweilen kaum eine deutsche Meile. Die grossen Sturmwinde aber, die oft durch ganze Länder sich ausbreiten, 9 bis 12 Meilen.

§. 82.

Wenn zwey starke Winde einander entgegen blasen, so wird an dem Orte, wo sie zusammenstossen, der Staub nebst den Dünsten, die in der Luft schwe-

ben, in einem Kreiſe herumgetrieben, welches man einen **Wirbelwind** zu nennen pflegt.

§. 83.

Die vornehmſten wäßrigen Luftерſcheinungen ſind die **Wolken**, der **Nebel**, der **Thau**, der **Regen**, der **Schnee**, der **Reif** und der **Hagel**.

§. 84.

Die **Wolken** beſtehen aus einer Menge wäßriger und verdickter Dünſte, welche in der obern Luft ſchweben, und wegen ihrer Dichtigkeit die Sonnenſtrahlen brechen und zurückwerfen, daher ſie unſern Augen unter verſchiednen Farben ſichtbar werden. Ihr Abſtand von der Oberfläche der Erden iſt nicht immer einerley, aber ſelten beträgt er mehr als $\frac{1}{4}$ oder aufs höchſte eine halbe Meile.

§. 85.

Eine Menge wäßriger und durch die Kälte verdickter Dünſte, welche in der untern Luft ſchweben, verurſachen einen **Nebel**, der alſo eigentlich ſeiner Natur nach nichts anders iſt, als eine Wolke, die ſich entweder herabgeſenkt, oder in der Tiefe erzeugt hat. Daß uns aber die Wolken unter einer andern Farbe erſcheinen, als die Nebel, rührt blos von ihrer Entfernung her. Wenn man ſich auf der Spitze eines hohen Berges mitten in einer Wolke befindet, ſo ſieht ſie völlig ſo, wie ein Nebel, aus. Steigt man aber den Berg herunter, ſo ſcheint ſie entweder viel dunkler oder viel heller zu ſeyn.

§. 86.

§. 86.

Der **Thau** besteht aus den feinen wäßrigen Dünsten, welche aus der Erde in die Höhe steigen und wieder herabfallen, aber wegen ihrer Subtilität in der Nähe nicht gesehen werden. Man pflegt auch diejenigen Wassertropfen, die man des Morgens auf den Blättern der Blumen und andrer Pflanzen erblickt, **Thau** zu nennen. Diese Tropfen aber sind nicht aus der Atmosphäre herabgefallene Dünste, sondern sie schwitzen des Nachts aus den Oefnungen der Pflanzen; denn man findet sie auch, wenn die Pflanzen die ganze Nacht hindurch mit einem Gefässe bedeckt gewesen sind. Der **Reif** ist nichts anders als gefrorner Thau.

§. 87.

Der **Regen** entsteht, wenn die wäßrigen Dünste in einer Wolke so nahe an einander kommen, daß sie sich wegen ihrer anziehenden Kraft in Tropfen vereinigen, welche eine grössere Schwere haben, als die Luft, in der sie schwimmen, und deswegen herabfallen. Weil nun die Atmosphäre ausser den wäßrigen auch andre Arten von Dünsten enthält, und durch die Bewegung des Windes die kleinen Eyer der Ungeziefer, der Saamen von verschiednen Pflanzen und andre kleine Körperchen in die Höhe getrieben werden, so ist es nicht zu verwundern, wenn bisweilen mit dem Regen auch verschiedne ölichte, schwefelartige und andre Materien herabfallen. Daß es aber auch Milch, Steine oder Frösche regnen sollte, ist eine fabelhafte Erzählung des gemeinen Volks.

§. 88.

Wenn eine grosse Regen-Wolke von der Heftigkeit eines Sturmwindes dergestalt zusammengepresset wird, daß die darinnen enthaltenen Wassertheilchen plötzlich zusammenfliessen, und in grosser Menge herabstürzen, so nennt man einen solchen Regen einen **Wolkenbruch**.

§. 89.

Bisweilen wird eine Regenwolke von zwey starken einander entgegengesetzten Winden zusammengedrückt, wodurch die wäßrigen Dünste, welche die Wolke ausmachen, in einem Kreise herumgetrieben werden; eine solche Erscheinung pflegt man einen **Wasserwirbel** oder **Wasserhose** zu nennen. Diese Wasserhosen, welche die Seereisenden oft in die größte Gefahr stürzen, haben gemeiniglich die Gestalt einer cylindrischen oder kegelförmigen Säule. Ihre breite Fläche hängt mit dem übrigen Theile der Wolke zusammen, und ihre Spitze ist nach der Erde zugekehret. Ihr Durchmesser beträgt oft 20 und mehr Ruthen. Sie senken sich schnell auf das Meer oder auf die Erde herunter; und wenn sie sich der Fläche des Meeres nähern, so steigt ihnen aus demselben eine kleine Wassersäule entgegen. Ihre Gewalt ist ausserordentlich groß. Die höchsten Bäume, Häuser und Schiffe werden von ihnen niedergerissen und verheeret. Ihre Bewegung ist sehr schnell, und mit einem fürchterlichen Getöse und Ueberschwemmung verbunden, welches alles so lange währet, bis die ganze Wolke heruntergefallen ist. Doch pflegt ein solcher Wasserwirbel selten länger als eine Stunde zu dauern.

§. 90.

§. 90.

Wenn die wäßrigen Dünste, indem sie aus der Luft herunterfallen, wie länglichte Fasern gefrieren, so entsteht **Schnee**; werden aber ganze kugelförmige Regentropfen zu Eise, so entsteht **Hagel**.

§. 91.

Die gewöhnlichsten feurigen Lufterscheinungen sind die **Gewitter**, die **Nordscheine**, die **Feuerkugeln**, die **Sternschnuppen** und die **Irrlichter**.

§. 92.

Ein **Gewitter** entsteht, wenn eine Wolke durch die innere Bewegung ihrer Theile, die sich an einander reiben, electrisch wird, und alsdenn einer unelectrischen Wolke oder einem andern unelectrischen Körper nahe kömmt, wodurch ein grosser Funken oder Blitz erzeugt wird, welcher durch seine schnelle Bewegung die Lufttheile erschüttert, und dadurch ein Getöse verursacht, welches man den **Donner** zu nennen pflegt.

§. 93.

Die Richtigkeit der vorigen Erklärung wird durch die Erfahrung bestätiget, indem eine eiserne Stange, oder ein andrer Körper, welcher der mitgetheilten Electricität fähig ist, allemal electrisch wird, wenn man ihn bey einem Gewitter an seidenen Schnüren in die freye Luft hängt.

§. 94.

Weil der Schall nicht so weit als das Licht fortgepflanzt wird, so läßt sich von einem sehr entfernten Gewitter, von welchem man den Donner nicht mehr hören kann, doch der Blitz oder der Wiederschein davon noch sehen. Ein solcher Wiederschein eines entfernten Blitzes, von welchem der Donner nicht gehört wird, ist das **Wetterleuchten.**

§. 95.

Das **Nordlicht** ist ein feuriger heller Schein, welcher an dem Himmel gegen den nordlichen Horizont bisweilen gesehen wird. Es scheint eine grosse Aehnlichkeit mit dem Gewitter und der Electricität zu haben, weil man beobachtet hat, daß bey starken Nordlichtern metallene Körper, die im freyen an seidenen Schnüren hiengen, electrisch geworden sind, daher es auch einige für ein unreifes Gewitter halten.

§. 96.

Die **Feuerkugeln** und **Sternschnuppen** sind ölichte und schweflichte Dünste, welche sich in der obern Luft entzünden und herabfallen.

§. 97.

Fast von eben der Art sind auch die **Irrlichter**, welche an sumpfigten Oertern und auf den Kirchhöfen aus den verfaulten Theilen der Pflanzen und Thiere erzeugt, durch die Kälte der Nacht in schleimichte Klumpen verdickt, alsdenn entzündet,

und

und wegen ihrer Leichtigkeit durch die geringſte Bewegung der Luft herumgetrieben werden.

§. 98.

Zu den glänzenden Lufterſcheinungen rechnet man vornemlich die **Regenbogen**, die **Höfe** um die Sonne und den Mond, ingleichen die **Nebenſonnen** und **Nebenmonde**.

§. 99.

Der **Regenbogen** entſteht, wenn die Sonnenſtrahlen in niederfallenden Regentropfen gebrochen und nach ihren Farben von einander abgeſondert, zugleich aber auch aus denſelben zurückgeworfen werden, daß von Tropfen, welche in einerley Cirkel liegen, gleichgefärbte Strahlen in das Auge des Zuſchauers kommen. Man kann daher nur alsdenn einen Regenbogen ſehen, wenn man eine regnende und dunkle Wolke vor ſich, die Sonne aber hinter ſich hat.

§. 100.

Die **Höfe** oder **Cronen**, wie ſie auch ſonſt genennt werden, und welche nicht nur bisweilen die Sonne und den Mond, ſondern auch andre Geſtirne zu umgeben ſcheinen, ſind leuchtende Kreiſe, die ſich nicht wirklich an dieſen Weltkörpern befinden, ſondern durch die Brechung der Lichtſtrahlen in unſrer Atmoſphäre entſtehen, wenn dieſelbe mit vielen Dünſten angefüllt iſt, wie man ſchon daraus ſehen kann, weil ein ſolcher Hof ſelten von zwey Perſonen, die etliche Meilen von einander entfernt ſind, zu einerley Zeit geſehen wird.

§. 101.

§. 101.

Die Nebensonnen und Nebenmonde entstehen, wenn sich in der Atmosphäre solche Dünste befinden, welche die Luftstrahlen eben so, wie die Spiegel, reflectiren können, daher man alsdenn das Bild der Sonnen oder des Mondes an verschiednen Oertern zugleich erblickt.

Die

Die Natürliche Geschichte.

Einleitung.

§. 1.

Die natürliche Geschichte enthält eine Beschreibung und Eintheilung aller so genannten natürlichen Körper, oder Naturalien, wodurch man diejenigen Körper auf unserm Erdboden versteht, die aus Materien von verschiedener Art zusammengesetzt, und durch die Kunst der Menschen noch nicht allzusehr verändert worden sind. Aus dieser Erklärung erhellt also, daß zweyerley Arten von Körpern aus dem Gebiete der natürlichen Geschichte ausgeschlossen sind, nemlich die elementarischen, die aus Theilen von einerley Wesen bestehen, und mit welchen sich die Naturlehre beschäftiget, und die künstlichen, welche durch eine willkührliche Zusammensetzung der Menschen hervorgebracht werden, und der Gegenstand der verschiedenen Künste und Handwerke sind.

§. 2.

Man pflegt alle natürliche Körper in drey Hauptclassen zu theilen, welche man die drey Reiche der Natur nennt, nemlich das Thierreich, das Pflanzenreich und das Mineralreich. Diese Eintheilung gründet sich auf folgende Unterschiede

der

der natürlichen Körper. Bey einigen findet man die Fähigkeit zu empfinden, und willkührliche Bewegungen hervorzubringen; bey andern aber blos die Fähigkeit sich zu bewegen, ohne Empfindungskraft, und noch andere sind nichts, als Massen, die aus einer Menge zusammengehäufter und mit einander verbundener Theile bestehen, und der Kraft sich zu bewegen beraubt sind. Die erstere Gattung nennt man **Thiere**, die andere **Pflanzen**, und die dritte **Mineralien** oder **Foßilien**.

§. 3.

Weil die Bewegungs-Fähigkeit eines Körpers, die ihren Grund in dem innern Bau desselben hat, in der Sprache der Naturforscher überhaupt **Leben** genannt wird, so pflegt man die jetzt angeführten Unterschiede der natürlichen Körper auch also auszudrücken: die Thiere wachsen, leben und empfinden; die Pflanzen wachsen und leben, ohne zu empfinden; die Mineralien wachsen, ohne zu leben und zu empfinden.

§. 4.

Wegen der grossen Menge der natürlichen Körper wird jedes Reich wieder in Classen, die Classen in Ordnungen, die Ordnungen in Geschlechter, und die Geschlechter in Arten eingetheilt, welche zusammengenommen ein so genanntes **System** oder **Methode** ausmachen.

§. 5.

An dem Nutzen der natürlichen Geschichte wird wohl niemand zweifeln, der wenigstens diesen Umstand überlegen kann; daß alle mechanischen Künste,

ohne

ohne welche unser Leben aller Bequemlichkeit beraubt seyn würde, in Bearbeitung der natürlichen Körper bestehen, und folglich desto vollkommener werden müssen, je genauer die Eigenschaften dieser Körper bekannt sind.

Erste Abtheilung.

Das Thierreich.

Erstes Capitel.

Von der allgemeinen Eintheilung der Thiere.

§. 6.

Das Thierreich wird nicht von allen Naturforschern auf einerley Art eingetheilt. Die Kürze der gegenwärtigen Abhandlung aber erlaubt es nicht, alle bekannte Eintheilungen anzuführen, daher itzt blos diejenige erklärt werden soll, welche den berühmten Schwedischen Ritter von Linne zum Urheber hat, und noch immer den meisten Beyfall findet.

§. 7.

Es gründet sich aber die Linnäische Eintheilung der Thiere auf die Verschiedenheit, welche theils in dem Bau ihres Herzens, theils in der Beschaffenheit ihres Bluts, theils in der Art und Weise, wie sie sich vermehren, wie sie Luft schöpfen und gehen, gefunden wird.

§. 8.

Bey einigen Thieren bestehet das Herz aus zwey Höhlen oder Kammern, bey andern aber nur

aus

aus einer. Das Blut ist bey vielen roth und warm; bey einigen roth und kalt, und bey manchen weiß und kalt. Ferner bringen einige ihre Jungen lebendig zur Welt, andre aber gebähren blos Eyer, aus welchen hernach die Jungen durch die Wärme ausgebrütet werden. Einige haben Lungen, andre aber nicht; einige haben Füsse, andern fehlen diese Theile. Daher theilt der Ritter von Linne das ganze Thierreich in sechs Classen.

Die erste Classe enthält diejenigen Thiere, welche zwey Herzkammern, rothes warmes Blut haben, und ihre Jungen lebendig gebähren.

Die zweyte Classe bestehet aus den **Vögeln**, die zwar ebenfalls zwey Herzkammern und rothes Blut haben, aber ihre Jungen nicht lebendig gebähren, sondern Eyer legen.

Die dritte Classe enthält die **Amphibien**, bey welchen man nur eine Herzkammer, kaltes rothes Blut und Lungen findet.

Die vierte Classe begreift die Fische in sich, welche ebenfalls nur eine Herzkammer und kaltes rothes Blut, aber keine Lungen haben.

Zu der fünften Classe gehören die **Insecten**, bey welchen man auch nur eine Herzkammer, kaltes weisses Blut, Fühlhörner und Füsse antrift.

Die sechste Classe besteht aus den **Gewürmen**, die zwar, wie die Insecten, nur eine Herzkammer, und weisses kaltes Blut, aber keine eigentliche Füsse und keine Fühlhörner haben.

§. 9.

Die Anzahl der Arten der Thiere, die man bereits kennt, beläuft sich schon nach dem Linnäischen Verzeichniß auf 5998. Nemlich

Die

Die erste Classe enthält	219	Arten
Die zweyte Classe	929	;
Die dritte Classe	291	;
Die vierte Classe	400	;
Die fünfte Classe	2995	;
Die sechste Classe	1164	;
Summe	5998	;

Diese grosse Anzahl derselben und die Absicht der gegenwärtigen Blätter nöthiget uns also, blos bey den Eintheilungen der Classen in Ordnungen stehen zu bleiben, und nur von einigen die Geschlechter und Arten anzuführen.

Zweytes Capitel.

Von den säugenden Thieren.

§. 10.

Diese Classe der Thiere, welche deswegen säugende (Mammalia) genannt werden, weil sie ihre Jungen lebendig gebähren, und an den Brüsten säugen, besteht nach dem System des Herrn von Linne aus **acht Ordnungen**, bey welcher Eintheilung auf die Füsse und die Verschiedenheit der Zähne gesehen wird.

§. 11.

Die **erste Ordnung** (Primates) enthält diejenigen Thiere, bey welchen man vier schneidende Vorderzähne, die in einer geraden Linie stehen, nebst einzelnen Eckzähnen antrift. Zu dieser Ordnung gehöret: **der Mensch** und **der Affe.**

§. 12.

Die zweyte Ordnung (Bruta) besteht aus denjenigen Thieren, die weder oben, noch unten Vorderzähne haben, hierunter gehören: der Elephant, das Nashorn, (Rhinoceros) die Seekuh, das Faulthier, der Ameisen-Fresser, das Formosische Teufelchen oder Armadillo (Manis) das Panzer-Thier.

§. 13.

Die Thiere der dritten Ordnung (Ferae) unterscheiden sich von den übrigen durch sechs spitzige Vorderzähne in der obern Kinnlade, und durch einzelne Eckzähne. Die Geschlechter dieser Ordnung sind: die Seehunde, die Hundartigen Thiere, wozu auch die Wölfe und Füchse gerechnet werden. Die Katzenartigen Thiere, wozu nicht nur die zahmen Katzen, sondern auch die Löwen, die Tieger, das Pantherthier, die wilden Katzen, und der Luchs gehören. Die Dachsartigen Thiere, nemlich der Dachs, das Zibethhier, und die pharaonische Maus (Ichneumon). Die Wieselartigen Thiere, wozu der Marder, der Iltis, das Hermelin, der Zobel, die Biberkatze, und die Fischotter gehören. Die Bäre.

§. 14.

Die Thiere der vierten Ordnung (Bestiae) haben eine unbestimmte Anzahl Vorderzähne, welche in der Mitten von einander abstehen, und zugleich an jeder Seite mehr als einen Eckzahn. Unter diese Ordnung gehören folgende Geschlechter: das Schwein, der Igel, der Maulwurf, die Fledermaus, die Spitzmaus, die Beutelratte.

§. 15.

§. 15.

Bey den Thieren der fünften Ordnung (Glires) trift man oben und unten zwey Vorderzähne an, welche von den Backenzähnen entfernt sind, ohne daß Eckzähne dazwischen stehen. Die Geschlechter dieser Ordnung sind: das **Stachelschwein**, der **Haase**, zu welchem Geschlechte auch das **Caninchen** gerechnet wird; der **Biber**, die **Maus**, wozu auch die **Ratte**, das **Murmelthier**, und das **Hamster** gehöret; das **Eichhorn**.

§. 16.

Die Thiere der sechsten Ordnung (Pecora) welche wiederkäuen, haben in der untern Kinnlade sechs bis acht Vorderzähne, die von den Backenzähnen entfernt sind, in der obern aber gar keine, und werden in folgende Geschlechter eingetheilt: das **Cameel**, das **Moschus-Thier**, der **Hirsch**, wozu auch das **Reh**, das **Elend-** und **Rennthier** gerechnet wird; die **Böcke**, wozu auch die **Gemsen** und **Steinböcke** gehören; das **Schaaf**, der **Ochse**.

§. 17.

Das Kennzeichen der siebenten Ordnung (Belluae) sind stumpfe Vorderzähne in beyden Kinnladen. Die Geschlechter dieser Ordnung sind: das **Pferd**, wozu man auch den **Esel** und **Waldesel** als Arten rechnet, das **Nilpferd** (Hippopotamus).

§. 18.

Die achte und letzte Ordnung enthält die **Wallfische**, (Cete) welche von den vorigen Thieren darinne hauptsächlich unterschieden sind, daß sie

anstatt der Füsse Floßfedern haben, sonst aber, was den Bau ihres Herzens, ihr Blut, ihre Lungen, und ihre Geburt betrift, mit ihnen weit mehr Aehnlichkeit, als mit den Fischen haben, weswegen sie auch der Herr von Linne aus der Classe der Fische in die Classe der säugenden Thiere versetzt hat. Die Geschlechter dieser Ordnung sind: der **Narwall**, der **Grönländische Wallfisch**, der **Porfisch**, der **Delphin**.

Drittes Capitel.

Von den Vögeln.

§. 19.

Bey der Eintheilung der Vögel wird vorzüglich die Verschiedenheit der Schnäbel in Betrachtung gezogen, daher folgende sechs Ordnungen entstanden sind:

1. die Raubvögel,
2. die Spechtartigen Vögel,
3. die Schwimmvögel,
4. die Sumpfvögel,
5. die Hühner,
6. die Singvögel.

§. 20.

Die **Raubvögel**, (Accipitres) welche die erste Ordnung ausmachen, haben einen gekrümmten Schnabel, und an der obern Kinnlade scharfe Ecken. Darunter gehören: der **Geier**, der **Falk**, wozu man auch den **Sperber** und **Adler** rechnet, die **Eule**, der **Neuntödter**.

§. 21.

Die zweyte Ordnung, welche die **Spechtartigen Vögel** (Picae) enthält, ist durch einen ober:

oberwärts erhabenen Schnabel von verschiedener Bildung kenntlich. Die bekanntesten dieser Ordnung sind: der Papagey, der Rabe, die Krähe, die Dole, die Elster, der Häher, der Paradiesvogel, der Guckuck, der Specht, der Eißvogel, der Krünitz, der Wiedehopf, der Colibri.

§. 22.

Die Vögel der dritten Ordnung, die Schwimmvögel, (Anseres) haben einen langen mit einer zarten Haut bedeckten Schnabel, an dessen Spitze sich noch ein Anhang befindet. Dazu gehören: die Gans nebst der Ente, dem Schwan und dem Eider, der Taucher, der Sturmvogel, der Pelican, die Mewe.

§. 23.

Die Sumpfvögel, (Grallae) welche die vierte Ordnung ausmachen, haben einen länglichrunden stumpfen Schnabel von verschiedener Länge. Es gehören darunter: die Löffelgans, der Strauß und der Kasuar, der Kranich, der Storch, der Reiher, die Rohrdommel, der Trappe, die Schnepfe, der Rybitz.

§. 24.

Die Hühner, (Gallinae) als die fünfte Ordnung der Vögel, haben einen kurzrunden Schnabel, an welchem die obere Kinnlade über die untere hervorragt; dazu gehören: der Pfau, der welsche Hahn, das Huhn, der Fasan, der Auerhahn, das Birkhuhn, das Haselhuhn, das Rebhuhn, die Wachtel.

§. 25.

Die Singvögel, (Passeres) welche die sechste und letzte Ordnung ausmachen, haben einen kegelförmigen zugespitzten Schnabel von verschiedener Dicke. Dazu gehören: die Tauben, die Lerchen, die Amseln, nebst den Drosseln und Ziemern, die Dompfaffen, die Emmerlinge, zu welchen auch die Goldammern, der Ortolan und der Schneevogel gerechnet wird, die Finken nebst den Stieglitzen, die Sperlinge mit den Hänflingen, Zeischen und Canarienvögeln, die Staare, die Bachstelzen, nebst dem Rothkehlchen, der Nachtigall und dem Zaunkönig, die Mayse, die Schwalben, die Ziegenmelker oder Nachtschwalben.

Viertes Capitel.
Von den Amphibien.

§. 26.

Durch die Amphibien, aus welchen die dritte Classe des Thierreichs besteht, werden nach dem linnäischen System alle Thiere verstanden, die nur eine Herzkammer, rothes kaltes Blut und Lungen haben, durch welche sie von den Fischen unterschieden sind, bey welchen man zwar ebenfalls nur eine Herzkammer, und rothes kaltes Blut, aber keine Lungen findet. Einige von diesen Thieren bringen lebendige Jungen zur Welt, andre legen Eyer. Einige leben sowohl im Wasser, als auch auf dem Lande; andre blos auf dem Lande, und noch andre blos im Wasser. Einige haben ordentliche Füsse, andre Floßfedern, und einige weder Füsse noch Floßfedern.

In

In Ansehung dieses letztern Umstandes werden daher die Amphibien in drey Ordnungen getheilt, die itzt kürzlich erklärt werden sollen.

§. 27.

Die Amphibien der ersten Ordnung (Reptiles) haben vier Füsse, die ihnen nicht nur zum Gehen, sondern auch zum Schwimmen dienen. Es gehören darunter: die Schildkröte, der Frosch nebst der Kröte, der Drache, die Eidexe, wozu auch das Krokodill, das Chamäleon und der Salamander gerechnet wird.

§. 28.

Die Amphibien der zweyten Ordnung sind die Schlangen, (Serpentes) welche weder Füsse noch Floßfedern haben, sondern sich bewegen, indem sie sich zusammenziehen und ausdehnen. Hierunter gehören: die Klapperschlange, Boa, die Natter, die Blindschleiche.

§. 29.

Die dritte Ordnung der Amphibien enthält diejenigen, welche Floßfedern haben, (Nantes) daher sie sonst zu den Fischen gerechnet wurden; es gehören dazu: der Steinsauger, der Roche, der Hay-Fisch, der See-Frosch-Fisch, der Stör.

Fünftes Capitel.

Von den Fischen.

§. 30.

Unter diese Classe des Thierreichs werden hier nur diejenigen Thiere gerechnet, welche eine einzige Herzkammer, und rothes kaltes Blut haben, nicht

durch Lungen, sondern durch Kiefern Othem hohlen, und sich in dem Wasser aufhalten. Die Eintheilung derselben in Ordnungen gründet sich auf die verschiedene Lage der Bauchfloßfedern, daher folgende vier Ordnungen entstehen.

§. 31.

Die erste Ordnung (Apodes) enthält diejenigen Fische, welche keine Bauchfloßfedern haben, dazu gehören: der **Aal**, der **Schwerdtfisch** u. a.

§. 32.

Die zweyte Ordnung (Jugulares) bestehet aus denjenigen Fischen, bey welchen man Bauch-Floß-Federn vor den Brust-Floß-Federn antrift. Dazu gehören: der **Stockfisch**, der **Kabiljau**, der **Weißfisch**, die **Meergroppe**, u. a. m.

§. 33.

Die Fische der dritten Ordnung (Thoracici) haben Bauch-Floß-Federn unter den Brust-Floß-Federn, z. E. die **Schollen**, die **Stinte**, der **Gründling**, der **Meerjunker**, der **Plattfisch**, der **Sander**, der **Barsch**, die **Macrelle**.

§. 34.

Zu der vierten Ordnung gehören die Fische mit Bauch-Floß-Federn hinter den Brust-Floß-Federn, (Abdominales) dergleichen sind: die **Schmerlen**, der **Lachs**, die **Karpfen**, die **Forellen**, die **Schleye**, der **Hecht**, die **Heringe**, die **Barben**, die **Karauschen**, u. a.

Sech-

Sechstes Capitel.

Von den Insecten.

§. 35.

In die Classe der Insecten werden, wie schon oben erinnert worden ist, alle Thiere gerechnet, welche weisses kaltes Blut, ein Herz mit einer einzigen Kammer und Fühlhörner haben. Man findet bey denselben mehr Füsse, als bey den übrigen Thieren, denn ein Insect ist zum wenigsten sechsfüßig. Zu dem Othemhohlen haben sie Luftlöcher an den Seiten, wodurch die Luft in alle Theile ihres Körpers gebracht wird. Die meisten Insecten sind mit Flügeln versehen, bey denen man sowohl in Ansehung der Zahl, als auch in Ansehung der Gestalt eine grosse Verschiedenheit antrift. Bey einigen Insecten sind die Flügel nackend und ohne Bedeckung, bey andern aber durch Flügeldecken von einer härtern Materie bedeckt. Uebrigens entstehen die Insecten eben sowohl, wie die größten Thiere, aus der Zeugung von ihres gleichen, und niemals von der Fäulniß. Daß man bisweilen im faulenden Fleische Insecten findet, kömmt daher, weil zuvor fliegende Insecten ihre Eyer darein gelegt haben, die hernach durch die Wärme ausgebrütet worden sind; denn wenn man frisch geschlachtet Fleisch in gläsernen oder andern Gefässen so verwahret, daß weder Fliegen noch ander Ungeziefer dazu kommen können, so findet man niemals das geringste Insect darinnen, wenn man es auch so lange in den Gefässen behält, bis es gänzlich verweset ist.

§. 36.

Ein merkwürdiger Umstand bey diesen Thieren

ist die dreyfache Verwandlung, welche die meisten davon leiden, ehe sie ihre eigentliche Gestalt erhalten. Zuerst kriecht aus dem Ey eines Insects eine **Raupe** oder sogenannte **Larve** heraus, welche ihre besondre Speise frißt, und einigemal ihre Haut verändert. Aus der Raupe entsteht hierauf ein trockner harter Körper, welcher ohne Speise lebt, und die **Nymphe** oder **Puppe** genannt wird, aus dieser kömmt endlich das Insect in seiner eigentlichen Gestalt hervor, welches sich alsdenn paaret, Eyer leget, und stirbt.

§. 37.

Die Haupteintheilung der Insecten gründet sich auf die Beschaffenheit der Flügel und Flügeldecken, daher folgende sieben **Ordnungen** entstanden sind.

§. 38.

Die **erste Ordnung** (Coleoptera) enthält alle diejenigen, welche ganze harte Flügeldecken haben, dazu gehören: die **Käfer**, die **Cochinelle**, der **Johannis-Wurm**, der **Erdfloh**, die **Heuschrecke**, die **Grille**, der **Grasehüpfer**, die **Schabe**, der **Ohrwurm**, der **Maywurm**, die **Spanische Fliege**.

§. 39.

Die **zweyte Ordnung** (Hemiptera) besteht aus solchen Insecten, bey denen man nur halbe Flügeldecken antrift; dazu gehören: die **Wanze**, die **Baumlaus**, der **Laternträger**, u. a. m.

§. 40.

Die Insecten der **dritten Ordnung** (Lepidoptera) haben vier mit einem feinen Staube bedeckte

deckte Flügel und einen haarichten Körper; Hieher gehören: die **Tagvögel** oder **Schmetterlinge**, und die **Nachtvögel**, wovon die **Seidenwürmer** und **Motten** Gattungen sind.

§. 41.

Die **vierte Ordnung** (Neuroptera) enthält diejenigen Insecten, welche vier unbedeckte netzförmige Flügel haben; dazu gehören: die **Wassernymphe**, der **Hoft** oder das **Ufernas**, die **Stinkfliege**.

§. 42.

Die **fünfte Ordnung** (Hymenoptera) ist durch vier glatte Flügel kenntlich, dazu gehören: die **Wespen** und **Hornissen**, die **Bienen**, die **Ameisen**.

§. 43.

Die **sechste Ordnung** (Diptera) enthält diejenigen Insecten, welche zwey unbedeckte Flügel haben; dazu gehören: die **Fliegen**, die **Bremsen**, die **Mücken**.

§. 44.

Die **siebende und lezte Ordnung** (Aptera) besteht aus denjenigen Insecten, die gar keine Flügel haben, dazu gehören: der **Floh**, die **Laus**, die **Milbe**, die **Spinne**, die **Todtenuhr**, der **Scorpion**, der **Krebs**, der **Kiefenfuß**, der **Kellerwurm**, die **Assel**, der **Vielfuß**.

Siebentes Capitel.

Von den Gewürmen.

§. 45.

Die Gewürme kommen darinne mit den Insecten überein, daß sie weisses kaltes Blut, und ein Herz mit einer einzigen Kammer haben, aber darinnen sind sie von ihnen unterschieden, daß ihnen eigentliche Füsse und Fühlhörner fehlen, statt deren sie Fühlfaden haben. Sie werden nach ihren äussern Gliedmassen in folgende fünf Ordnungen eingetheilt.

§. 46.

Die erste Ordnung (Intestina) welche ihren Namen von der Aehnlichkeit dieser Gewürme mit den Eingeweiden bekommen hat, enthält diejenigen, welche einen cylindrischen Körper haben, nackend und ohne Gliedmassen sind. Dazu gehören: der Faden- oder Nervenwurm, der Regenwurm, der Spulwurm, der Blutigel, der Holzwurm.

§. 47.

Die Gewürme der zweyten Ordnung (Mollusca) sind ebenfalls nackend, aber mit verschiedenen Gliedmassen versehen; dazu gehören: die Erd-Schnecke, die Meerassel, die Seekatze, worunter auch der sogenannte Dintenfisch gerechnet wird, der Seeigel, der Seestern.

§. 48.

Die dritte Ordnung (Testacea) enthält diejenigen, welche in kalkartigen Gehäusen wohnen, und daher

daher Schaalthiere genannt werden, wozu alle Arten von Schnecken und Muscheln gehören. Nemlich den Namen der Schnecken (Cochleae) giebt man allen denen, deren Schale aus einem Stücke besteht, und gewunden ist; Muscheln aber (Conchae) heissen diejenigen, deren Schale aus mehr als einem Stücke bestehet.

§. 49.

Zu der vierten Ordnung rechnet man die sogenannten Steinpflanzen (Lithophyta) oder Korallengewächse, welche nichts anders sind, als kalkartige Gehäuse gewisser kleinen zusammengesetzten Thiere, die sich diese Wohnungen selbst erbauen, und sich in Zweigen, nach Art der Pflanzen ausbreiten und vermehren; dazu gehören: die Tubiporen, welche aus lauter parallellaufenden Cylindern bestehen, die Milleporen, welche verschiedene Aeste mit sehr vielen kleinen Löchern haben; die Madreporen, bey denen man kleine reguläre Sterne antrift.

§. 50.

Die fünfte und letzte Ordnung enthält die Thierpflanzen, (Zoophyta) welches eigentliche Thiere sind, die aber vieles mit den Pflanzen gemein haben. Die meisten davon sind an Felsen und andre Körper durch Wurzeln befestiget. Sie haben einen Stengel, und zergliedern sich in Zweige, an welchen man Knospen und Blumen, aber keine Blätter antrift. Die Blumen sind lebendig, haben eine willkührliche Bewegung, und bringen Saamenkapseln hervor, aus denen wieder solche lebendige Pflanzen entstehen; zu dieser Gattung gehören: die Rosenkränze (Sertulariae) und die Polypen. Einige

andre

andre Thiere, die man auch zu dieser Ordnung rechnet, haben weder Wurzeln noch Zweige, sondern bewegen sich frey, z. E. das Kugelthier (Volvox) und die Bandwürmer, (Teniae) welche letztern man oft von einer sehr ansehnlichen Länge in den Eingeweiden der Menschen und Pferde antrift. Wenn man diese Thiere in viele Stücke zerschneidet, so ist jedes Stück ein besonders lebendiges Thier, welches an dem abgeschnittenen Ende wieder neue Glieder bekömmt.

Zweyte Abtheilung.

Das Pflanzenreich.

Erstes Capitel.

Von den Pflanzen und ihren vornehmsten Theilen überhaupt.

§. 51.

Vegetabilien oder Pflanzen im weitläuftigen Verstande genommen sind alle diejenigen Naturalien, welche wachsen, und eine Art von Leben, aber nicht, wie die Thiere, eine Fähigkeit haben, ihre Körper aus einem Orte in einen andern zu bewegen, daher sie allemal mit der Erde oder mit einem andern Körper zusammenhängen, und dadurch ihre Nahrung erhalten.

§. 52.

Das ganze Pflanzenreich, welches der Gegenstand derjenigen Wissenschaft ist, welche man die Botanik

tanik nennt, läßt sich sehr bequem in sieben Hauptfamilien eintheilen, welche folgende Namen führen:

1. Pflanzen, in einer engern Bedeutung genommen, wozu nicht nur alle Kräuter und Sträucher, sondern auch die Bäume gehören.
2. Palmgewächse, die nur einen Stamm haben, auf dessen Gipfel die Blätter ansitzen.
3. Gräser.
4. Farren-Kräuter, (Filices) welches solche Gewächse sind, die keinen Stengel haben, und deren Blätter unmittelbar aus der Wurzel steigen.
5. Mooſe. (Musci)
6. Aftermooſe. (Algae)
7. Schwämme. (Fungi)

§. 53.

Wenn man den innern Bau einer Pflanze betrachtet, so findet man darinnen Häute, Röhren und Bläschen. In den Häuten sind viele kleine Löcher, durch welche das Wasser hindurch dringen kann. Die Röhren sind von zweyerley Art, Saftröhren und Luftröhren. Die Saftröhren enthalten einen wäßrigen oder milchichten, oder schleimigten oder andern Saft, der sowohl in Ansehung der Farbe, als auch in Ansehung andrer Umstände sehr verschieden ist. Die Bläschen dienen zu der Absonderung der mannigfaltigen flüßigen Theile, und sind bey den Pflanzen eben dasjenige, was die Glandeln bey den Thieren sind.

§. 54.

Was den äussern Bau einer Pflanze betrift, so lassen sich vorzüglich drey Haupttheile unterscheiden, die Wurzel, der Stamm und die Blüthen, wo-

von

von die ersten beyden zur Erhaltung und zum Wachsthum, der letzte aber zu der Fortpflanzung derselben dienet.

§. 55.

Die **Wurzel** ist derjenige Theil der Pflanze, durch welchen sie mit der Erde oder mit andern Körpern zusammenhängt, und ihre meiste Nahrung an sich ziehet. Der **Stamm**, welcher bey einigen Pflauzen **Stängel**, bey einigen **Halm**, bey einigen **Schaft** und bey andern **Strunk** oder **Stiel** genannt wird, ist derjenige Theil derselben, welcher sich über der Erde befindet, und die übrigen Theile der Pflanze trägt. Die Theile des Stammes sind die **Haut** (Epidermis), die **Rinde** (Cortex), der **Splint** (Liber), das **Holz** (Lignum), und das **Mark** (Medulla). An dem Stamme oder dessen Zweigen befinden sich die **Blätter**, welche bey einigen Pflanzen durch einen Stiel, bey andern aber ohne Stiel mit dem Stamme selbst verbunden sind, und die eigentlich aus der Rinde entstehen, deren schwammiges Gewebe in die Gestalt des Blattes ausgedehnt wird.

§. 56.

Bey den **Blüthen** oder **Blumen** sind ebenfalls verschiedne Theile zu unterscheiden, von denen einige ihnen nur zur Zierde oder Beschützung dienen, andre aber ihnen wesentlich sind. Zu den erstern gehöret die **innere Blumendecke** oder die **Blume** im engern Verstande, (Corolla) und die **äussere Blumendecke** oder der **Kelch** (Calix); zu den wesentlichen aber die **Staubgefässe** (Stamina) und die **Pistille** oder **Staubwege**.

§. 57.

§. 57.

Die Theile der **Staubgefässe** sind die **Staubfäden** (Filamenta), und die **Antheren**, welche von den Fäden entweder an der Spitze oder an der Seite getragen, und von einigen auch **Staubbeutel, Staubfache** oder **Staubbehältnisse** genannt werden. Die Staubfäden sind bey einigen Blumen von gleicher, bey andern von ungleicher Länge, und bisweilen ganz frey, bisweilen aber zusammengewachsen. Die **Antheren**, welche ebenfalls auf verschiedene Art gebildet sind, enthalten in ihren innern Behältnissen den **Blumenstaub** (Pollen) welchen sie, wenn sie sich öfnen, auszustreuen pflegen.

§. 58.

Das **Pistill**, welches den mittelsten Theil der Blume einnimmt, besteht aus drey Stücken, wovon das unterste der **Fruchtknoten** oder **Eyerstock** (Germen, Ovarium) weil es das Behältniß der jungen Frucht ist, das mittelste der **Griffel** oder das **Käulchen** (Stylus), und das oberste die **Narbe** (Stigma) genannt wird. Der Griffel fehlt in einigen Pflanzen, und alsdenn sitzt die Narbe gleich auf der jungen Frucht.

§. 59.

Die Antheren und Pistille sind die wichtigsten Theile einer Blume. In vielen findet man sie alle beyde; in einigen aber nur Antheren, und in andern nur Pistille. Blumen, die nur Antheren und keine Pistille haben, tragen niemals Frucht, und Blumen mit Pistillen nur alsdenn, wenn das Stigma derselben, welches gemeiniglich etwas feuchte zu seyn pflegt,

mit dem Staube der Antheren befruchtet worden ist. Weil nun diese Befruchtung des Pistills durch den Blumenstaub eine Aehnlichkeit mit der Zeugung der Thiere hat, so pflegt man sich bey den Antheren und bey den Staubgefässen überhaupt ein männliches Geschlecht, bey den Pistillen aber ein weibliches Geschlecht einzubilden. **Männliche Blumen** (Flores mares) heissen also diejenigen, welche nur Antheren; **weibliche** hingegen (Flores feminae) solche, welche nur Pistille, und **vollkommne** oder **Zwitterblumen** diejenigen, welche Antheren und Pistille zugleich haben.

§. 60.

Daß aber in der That eine solche Befruchtung bey den Pflanzen, wie bey den Thieren nöthig ist, beweisen eine Menge Erfahrungen, wovon ich jetzt nur eine anführen will. In Berlin konnte man von einem weiblichen Palmbaume, der viele Jahre hindurch allemal blühte, niemals vollkommne und reife Datteln erhalten, bis man aus Leipzig Blumen von einem männlichen Palmbaume bringen, und über die weiblichen Blumen hängen ließ, wodurch die Datteln nicht nur ihre vollkommne Reife erhielten, sondern auch viel völliger und stärker wurden.

§. 61.

Bey den **Früchten**, welche auf die Blüthen der Pflanzen folgen, und nichts anders, als die ausgedehnten Eyerstöcke sind, läßt sich der **Saamen** und das **Saamengehäuse** (Pericarpium) unterscheiden. Der Saamen besteht aus einer **Haut**, aus dem **Kern** und aus dem **Keime**, in welchem das junge Pflänzgen verborgen liegt. Das Saa-

mengehäuse, welches den Saamen in sich enthält, ist entweder blos hülsigt und häutig, wie bey dem Getreide, oder fleischigt, wie bey den Beeren und dem Obste, oder holzigt, wie bey den Tannzapfen, oder von noch einer härtern Materie, wie bey den Nüssen.

Zweytes Capitel.

Von der Eintheilung der Pflanzen in Classen.

§. 62.

Die Pflanzen werden in dem linnäischen System eben so, wie die übrigen Naturalien, in Classen, Ordnungen, Geschlechter und Arten eingetheilet. Wir müssen uns aber hier, zu Vermeidung der Weitläuftigkeit, blos auf die Eintheilung in Classen einschränken. Die Anzahl der Arten, welche der Ritter von Linne beschrieben hat, beläuft sich auf 7180, und es ist sehr wahrscheinlich, daß es wenigstens noch einmal so viel Arten wirklich giebt.

§. 63.

Der Herr von Linne legt bey seiner Eintheilung der Pflanzen diejenigen Theile, welche ihr Geschlecht ausmachen, die Staubfäden und Pistille zum Grunde, daher sein System das **Sexual-System** genannt wird. Nemlich bey den **Classen** wird auf die **Zahl**, Proportion und Verbindung der Staubfäden, bey den Ordnungen aber auf die Figur, Eintheilung und Lage der Pistille gesehen. Die Classen selbst, deren Anzahl sich auf 24 erstreckt, haben folgende Namen:

1) Einmännrige (monandria *)
2) Zweymännrige (diandria)
3) Dreymännrige (triandria)
4) Viermännrige (tetrandria)
5) Fünfmännrige (pentandria)
6) Sechsmännrige (hexandria)
7) Siebenmännrige (heptandria)
8) Achtmännrige (octandria)
9) Neunmännrige (enneandria)
10) Zehnmännrige (decandria)
11) Zwölfmännrige (dodecandria)
12) Zwanzigmännrige (icosandria)
13) Vielmännrige (polyandria)
14) Zweymächtige (didynamia)
15) Viermächtige (tetradynamia)
16) Rechte Brüder (monadelphia)
17) Halbbrüder (diadelphia)
18) Viel Geschwister (polyadelphia)
19) Schwäger (syngenesia)
20) Weibermänner (gynandria)
21) Einhäußler (monoecia)
22) Zweyhäußler (dioecia)
23) Vielfache Ehe (polygamia)
24) Heimliche Ehe (cryptogamia)

Diese Namen, welche freylich zum Theil etwas wunderlich klingen, und einige Dunkelheit enthalten, werden aus folgenden Erklärungen sich leicht verstehen lassen.

§. 64.

Die erste Classe (einmännrige) enthält diejenigen Pflanzen, welche Zwitterblumen mit einem einzigen Staubfaden tragen, dazu gehören: Ingwer, Kardamomen, Salzkraut.

§. 65.

---

* Statt der Namen monandria, diandria, triandria &c. pflegen auch einige die Namen, monanthera, dianthera, trianthera &c. zu gebrauchen.

§. 65.

Die zweyte Classe (zweymännrige) hat Zwitterblumen mit zwey Staubfäden, dahin gehören: Jasmin, der Oelbaum, Spanischer Hollunder, Ehrenpreis, Eisenkraut, Rosmarin, Salbey, Pfeffer.

§. 66.

Die dritte Classe (dreymännrige) hat Zwitterblumen mit drey Staubfäden; dahin gehören: die Schwerdtlilie, der Hirse, der Hafer, das Schilf, der Rocken, die Gerste, der Weitzen.

§. 67.

Die vierte Classe (viermännrige) hat Zwitterblumen mit vier Staubfäden von einerley Länge, wodurch sie von der vierzehnten Classe unterschieden ist, wo ebenfalls Blumen mit vier Staubfäden, aber von ungleicher Länge vorkommen; dahin gehören: Kartendistel, Scabiosen, Färberröthe, Wegrich, der Herlitzenbaum, Stachelnüsse.

§. 68.

Die fünfte Classe (fünfmännrige) hat Zwitterblumen mit fünf Staubfäden; dahin gehören: Ochsenzunge, Schlüsselblume, Nutrickel, Glockenblume, der Casseebaum, Wollkraut, Taback, Judenkirschen, Nachtschatten, Johannisbeere, Stachelbeere, der Weinstock, Mangold, der Rüster, Engelwurz, Coriander, Schierling, Kerbel, Petersilge, Hollunder, Hünerdarm, Vergiß mein nicht, Mohrrübe u. a. m.

§. 69.

Die sechste Classe (sechsmännrige) hat Zwitter-

terblumen mit sechs Staubfäden, die, wie alle Staubfäden der ersten 13 Classen, von einerley Länge sind, wodurch diese Classe von der funfzehnten unterschieden ist, wo man auch sechs Staubfäden antrift, von denen aber zwey kleiner als die übrigen viere sind: dahin gehören: **Narcissen, Knoblauch, die Lilie, die Kayserkrone, die Tulpe, der Spargel, die Mayblume, Hyacinthe, Aloe, Calmus, Binsen, Sauerampfer.**

§. 70.

Die siebente Classe (siebenmännrige) hat Zwitterblumen mit sieben Staubfäden, z. E. die **wilden Castanien.**

§. 71.

Die achte Classe (achtmännrige) hat Zwitterblumen mit acht Staubfäden, z. E. **Indianische Kresse, Weiderich, Heidelbeeren, Preisselbeeren, Buchweizen.**

§. 72.

Die neunte Classe (neunmännrige) hat Zwitterblumen mit neun Staubfäden, z. E. **der Lorbeerbaum, Rhabarber.**

§. 73.

Die zehnte Classe (zehnmännrige) hat Zwitterblumen mit zehn Staubfäden, z. E. **die Raute, Steinbrech, die Nelke, Raden oder Radenkorn.**

§. 74.

Die eilfte Classe (zwölfmännrige) enthält alle diejenigen Pflanzen, die zwölf oder mehr, aber weniger als 20 Staubfäden haben, z. E. **Portulack oder Burzelkraut, Wolfsmilch, Hauslaub.**

§. 75.

§. 75.

Die zwölfte Classe (zwanzigmännrige) enthält diejenigen Pflanzen, welche 20 oder mehr Staubfäden haben, wenn sie nemlich nicht an dem Boden der Blüthe, sondern an den innern Seiten des Kelchs angewachsen sind. Z. E. der Myrtenbaum, der Granatbaum, der Pfersichbaum, der Mandelbaum, der Pflaumbaum, der Mispelbaum, der Birnbaum, die Vogelbeeren, die Rose, die Himbeeren, die Erdbeeren, Fünffingerkraut.

§. 76.

Die dreyzehnte Classe (vielmännrige) begreift diejenigen Pflanzen unter sich, die über 20 bis 100 Staubfäden haben, welche auf dem Boden und nicht auf dem Kelche sitzen. Dazu gehören: Schwalbenkraut, Mohn, die Linde, Kapern, der Thee, Ritterspurn, Anemone, Ranunkel.

§. 77.

Die vierzehnte Classe (zweymächtige) hat zum Kennzeichen vier Staubfäden, von denen zwey kürzer sind als die übrigen beyden, worinnen der Unterschied dieser Classe von der vierten bestehet. Dazu gehören: Isop, Katzenmünte, Lavendel, Münze, Gundermann, taube Nessel, Roßpoley, Andorn, Thymian, Melisse, Augentrost u. a.

§. 78.

Die funfzehnte Classe (viermächtige) hat sechs Staubfäden, von welchen viere merklich länger als die beyden übrigen sind, wodurch sie sich von der sech-

sten Classe unterscheidet. Dazu gehören: Kresse, Hirtentasche, Löffelkraut, Hederich, Leukojen, Nachtviolen, Rettig, Senf, Waid, Rose von Jericho, Kohl, Rüben.

§. 79.

Zu der sechszehnten Classe (rechte Brüder) gehören diejenigen Pflanzen, deren Staubfäden unten in einen Körper zusammengewachsen sind, z. E. Storchschnabel, Malven, Eibisch, Baumwolle.

§. 80.

Die siebenzehnte Classe (Halbbrüder) besteht aus solchen, deren Staubfäden in zwey Körper zusammengewachsen sind. Z. E. Genist, Bohnen, Erbsen, Wicken, Linsen, Süßholz, Klee.

§. 81.

Die achtzehnte Classe (viel Geschwister) enthält diejenigen Pflanzen, deren Staubgefässe in drey oder mehrere Körper zusammengewachsen sind. Z. E. Der Citronenbaum, die Pomeranzen, Johanniskraut.

§. 82.

Die neunzehnte Classe (Schwäger) enthält diejenigen Pflanzen, deren Staubgefässe an ihrem obern Theile, den Antheren, zusammengewachsen sind. Z. E. Wegwart oder Cichorien, Butterblume, Sallat, Klette, Artischocken, Distel, Beyfuß, Camillen, Huflattig, Sammetblume, Schafgarbe, Flockenblume, Kornblume, Sonnenblume, Ringelblume, Veilchen, Balsamine.

§. 83.

§. 83.

Die zwanzigste Classe (Weibermänner) enthält solche Pflanzen, deren Staubfäden an die Pistille angewachsen sind, z. E. Kuckucksblume, Passionsblume, Osterlucey oder Hallwurz.

§. 84.

Zu der ein und zwanzigsten Classe (Einhäußler) werden diejenigen Pflanzen gerechnet, von denen jede sowohl männliche als auch weibliche Blumen enthält. Z. E. Wasserlinsen, Türkischer Weitzen, Rindgraß, Nessel, Maulbeerbaum, Burbaum, Birke, Erle, Fuchsschwanz, Pimpernelle, Buche, Eiche, Wallnußbaum, Haselstaude, Fichte, Tanne, Cypressen, Kürbis, Gurken, Melonen.

§. 85.

Die Pflanzen der zwey und zwanzigsten Classe (Zweyhäußler) haben ebenfalls Blumen von beyderley Geschlechte, aber nicht an einerley Stamme, wie die vorigen, sondern so, daß an einem Stamme blos männliche, an einem andern blos weibliche Blumen sind. Z. E. die Weide, die Mistel, Spinat, Hanf, Hopfen, die Espe, Wachholder, der Taxbaum.

§. 86.

Die Pflanzen der drey und zwanzigsten Classe (vielfache Ehe) haben nicht nur männliche und weibliche, sondern auch Zwitterblumen. Bey einigen trägt einerley Stamm sowohl die Zwitterblumen, als auch die weiblichen oder männlichen Blumen;

bey andern aber sind die Zwitterblumen auf einem Stamme, und die männlichen oder weiblichen auf einem andern allein. Dazu gehören: **Ahorn, Sinnkraut** oder die fühlende **Pflanze, der Eschenbaum, der Feigenbaum.**

§. 87.

Die vier und zwanzigste Classe (heimliche Ehe) enthält alle diejenigen Pflanzen, deren Blumen und Befruchtung mit blossen Augen nicht gesehen werden können. Dazu gehören: alle **Farrenkräuter, Moose, Aftermoose, Schwämme,** worunter auch der **Schimmel** gerechnet wird.

Dritte Abtheilung.

Das Mineralreich.

Erstes Capitel.

Von den Mineralien überhaupt.

§. 88.

Wir kommen nunmehr zu denjenigen Naturalien, welche zwar wachsen, aber weder Empfindung noch eine Art von Leben haben, sondern blos als Haufen verschiedner mit einander verbundner Dinge anzusehen sind. Man nennt sie **Mineralien** im weitläuftigen Verstande, wie unsern jungen Lesern noch aus der Einleitung bekannt seyn wird.

§. 89.

Die Mineralien entstehen nicht durch die Fortpflanzung, wie die Thiere und Pflanzen, sondern blos durch äusserliche Ansetzung ihrer Theile; denn

was

as einige von dem Saamen derselben behaupten, ist llig ohne Grund. Daß sie aber auch ihren Ur: rung nicht blos aus der ersten Schöpfung haben, ıdern noch heutiges Tages wachsen, läßt sich dar: ıs sehen, weil man in ihnen nicht nur sehr oft frem: Körper findet, sondern weil sich auch die Gänge den Bergwerken, aus welchen man Mineralien graben hat, nach einer Reihe von Jahren wieder llen, und man alsdenn sehr oft die Metalle an Holz, ıd an andern Körpern antrift.

§. 90.

Wie aber eigentlich die Mineralien in der Erde zeugt werden, ist uns noch unbekannt. So viel ßt sich wohl mit Grunde behaupten, daß die Wir: ıng des Feuers, der Luft und des Wassers viel zu rer Erzeugung beytragen müsse.

§. 91.

Die Mineralien werden, wie die übrigen Na: ıralien, nicht von allen Gelehrten auf einerley Wei: eingetheilt. Nach dem System des Herrn von inne besteht das ganze Mineralreich nur aus 3 Clas: n, welche von ihm **Felssteine** (petrae), **Mi: ıern** (minerae), und **Foßilien** (fossilia) genannt oerden. Andre mineralogische Schriftsteller hinge: en pflegen die Mineralien in mehr Classen zu ver: heilen. So findet man z. E. in des Herrn Berg: ath Lehmanns Entwurf einer Mineralogie eine Ein: heilung dieser Körper in 5 Classen, nemlich:

1) Erden,
2) Salze,
3) Brennliche Mineralien,
4) Steine,
5) Metalle.

Und

Und da die letztere Eintheilung zu unsrer Absicht bequemer zu seyn scheinet, so wollen wir nach derselben und nach dem Lehmannischen Entwurfe überhaupt das ganze Mineralreich kürzlich durchgehen.

Zweytes Capitel.

Von den Erdarten.

§. 92.

Durch das Wort **Erde** versteht man hier überhaupt alle feste Körper, welche sich leicht zerreiben, aber weder in Wasser noch in Oelen auflösen lassen. Man findet sie niemals ganz rein, sondern immer mit einigen fremden Theilen vermischt, wodurch die verschiedenen Erdarten entstehen, die sich in folgende 12 Geschlechter eintheilen lassen, nemlich:

1) **Thon**,
2) **Mergel**,
3) **Mondmilch**,
4) **Tripel**,
5) **Bolus**,
6) **Seiffenerde**,
7) **Kreide**,
8) **Steinmark**,
9) **Bunte Kreide**,
10) **Umbra**,
11) **Ocker**,
12) **Gartenerde**.

§. 93.

Der **Thon** (argilla) ist eine fette Erde, welche mit etwas Wasser angefeuchtet, zähe wird, und sich alsdenn in verschiedne Gestalten auf der Töpferscheibe drehen, und im Feuer hart brennen läßt. Zu den Thonarten gehöret nicht nur der **Töpferthon**, der **Pfeiffenthon**, und die **Porcellanerde**, sondern auch der gemeine **Leim**, welcher zum Bauen gebraucht wird, und die meisten **Walkererden**.

§. 94.

§. 94.

Mergel (marga) ist eine fette, schmierige und
ht allzuzähe Erde, welche im Wasser in rhomboi-
ische Blättchen mit Knattern zerspringt, nach und
h zu einer weichen Masse wird, aber im Feuer sich
ht so, wie der Thon, hart brennen läßt.

§. 95.

Mondmilch (Lac lunae, Morochtus, A-
ricus petraeus) ist eine leichte, lockere, magere
d schlammigte Erde, welche man in Klüften und
hlen, auch bisweilen mitten in festen Steinen fin-

§. 96.

Tripel (Trippela) ist eine magere, zarte und
arfe Erde, welche man leicht zu Pulver zerreiben,
d wegen ihrer Schärfe zum Schleifen und Poliren
talliſcher und anderer Körper gebrauchen kann.

§. 97.

Bolus (Bolus, Bolus Armena) ist eine
te, glatte, nicht fest zusammenhängende Erde, wel-
e beständig abfärbt, im Wasser zergeht, und im
uer manchmal hart wird, manchmal zu Glas fliesset.

Diese Erdart wurde sonst auch **Siegelerde** (ter-
sigillata) genannt, weil man daraus zum Gebrauch
der Medicin kleine Kuchen machte, und dieselben,
n alle Verfälschung zu verhüten, besiegelte.

§. 98.

Seifenerde (Smectis) ist eine glatte, fette,
ättrige Erde, welche im Wasser wie Seife schäumet.

§. 99.

§. 99.

Kreide (Creta) ist eine feste, weisse, sehr trockene Erde, welche das Wasser geschwind einsauget, und mit Scheidewasser brauset.

§. 100.

Steinmark (Lithomarga) ist eine fette, feste, glatte Erde, von verschiednen Farben, welche sich mit dem Messer schaben, aber mit Wasser zu keinem Teige machen läßt, auch nicht abfärbt.

§. 101.

Bunte Kreide (Graphium) ist eine feste Erde von schwarzer, gelblicher oder rother Farbe, welche abfärbt, aber im Wasser sich nicht auflößt.

§. 102.

Umbra (Vmbra) ist eine fette dunkelbraune Erde, welche einen asphaltischen Geruch von sich giebt, wenn sie auf glüende Kohlen geworfen wird.

§. 103.

Ocker (Ochra) ist ein aufgelößtes, und in bunte Erde verwandeltes Erz.

§. 104.

Gartenerde (Humus) ist eine aus verschiedenen Erdarten, aus verfaulten Pflanzen und thierischen Körpern zusammengesetzte Erde.

Drittes Capitel.

Von den Salzen.

§. 105.

Salze heissen alle mineralische Körper, welche sich in Wasser auflösen lassen, und auf der Zunge einen

nen Geſchmack von ſich geben. Man pflegt ſie in ey Ordnungen einzutheilen, in

1.) Saure Salze (Salia acida)
2.) Laugen-Salze (Salia alcalia)
3.) Mittel-Salze (Salia media).

§. 106.

Saure Salze (Salia acida) ſind diejenigen, elche einen ſauren Geſchmack auf der Zunge erre-n, den Violen-Saft und die meiſten blauen äfte der Pflanzen roth färben, mit Laugenſal-n brauſen, und mit ihnen zu Mittelſalzen wer-n. Ein reines ſaures Salz wird als ein feſter örper im Mineralreich gar nicht gefunden, ſondern los durch die Kunſt aus den Mittelſalzen geſchieden.

§. 107.

Laugen-Salze (Salia alcalia) verurſachen uf der Zunge einen ſcharfen Geſchmack, färben den Violen-Saft und andre blaue Säfte der Pflanzen rün, brauſen mit ſauren Salzen, und werden da-nit zu Mittelſalzen. Es giebt aber zweyerley Lau-enſalz in der Natur; ein **feuerbeſtändiges** (alca-i fixum) und ein **flüchtiges** (alcali volatile, vri-ioſum). Das erſte fließt im Feuer, und ſchlägt as im Waſſer aufgelößte ſublimirte Queckſilber raungelb nieder; das andere verfliegt im Feuer, nd ſchlägt das ſublimirte Queckſilber aus dem Waſ-ſer weiß nieder.

§. 108.

Mittel-Salze (Salia media) entſtehen aus der Vermiſchung eines ſauren und Laugenſalzes, ver-urſachen auf der Zunge einen ſalzigen Geſchmack,

pflegen

pflegen aber mit sauren und Laugensalzen nicht zu brausen, auch die Farbe des Violen-Safts nicht zu verändern. Dazu gehören:

1.) das Kochsalz,	5.) Borax,
2.) Salpeter,	6.) Vitriol oder Kupferwasser,
3.) Salmiak,	7.) Alaun,
4.) Bittersalz,	8.) Arsenik.

§. 109.

Das Kochsalz (Sal commune) schießt in cubischen Crystallen an, und prasselt, wenn es aufs Feuer geworfen wird.

§. 110.

Salpeter (Nitrum) macht lange sechseckige Crystalle, verursacht auf der Zunge einen kühlenden Geschmack, und verbrennt im Feuer mit Zischen und einer hellen Flamme.

§. 111.

Salmiak (Sal ammoniacum) schmeckt nach Kochsalz und Urin, schießt in federichten Crystallen an, schmelzt in mäßigem Feuer, und wird flüchtig.

§. 112.

Bittersalz (Natrum), welches auch Gesundbrunnen-Salz genannt wird, weil es sich in verschiedenen Sauerbrunnen und Bädern befindet, hat einen bitterlichen Geschmack, macht länglich viereckige Crystallen, und fliesset leicht im Feuer.

§. 113.

Borax (Borax, Sal Tincal) ist ein mit allerley fremden Materien vermischtes Mittelsalz, welches im Anfange süßlich, hinten nach aber herbe schmeckt

im

n Wasser schwer schmelzt, meistentheils sechseckige rystallen macht; sich im Feuer aufblähet, und end: ch zu einem Glase fließt.

§. 114.

Vitriol (Vitriolum) hat einen eklen zusam: enziehenden Geschmack, schiesset in allerley Cry: tallen an, und fliesset im Feuer. Man hat davon reyerley Arten:

1.) **Eisenvitriol** (Vitriolum Martis), welcher seinen Na: men von der darinnen enthaltenen Eisenerde bekommen hat, und grün, bisweilen auch weiß ist.

2.) **Kupfervitriol** (Vitriolum Veneris), welcher Kupfer: erde enthält, und blau und durchsichtig ist.

3.) **Zinkvitriol** (Vitriolum Zinci), welcher aufgelößten Zink in sich enthält, mehrentheils weiß, bisweilen aber auch röthlich ist.

§. 115.

Alaun (Alumen) ist ein achteckiges Mittel: salz, welches anfangs einen süßlichen, hinten nach aber zusammenziehenden Geschmack hat, und im Feuer sich aufblähet. Vitriol und Alaun pflegt man auch **styptische Salze** zu nennen.

§. 116.

Arsenik (Arsenicum) ist ein metallisches Mit: telsalz, welches in seiner reinen Gestalt weiß, cry: stallinisch, bald prismatisch, bald pyramidalisch, bald als ein Rhombus erscheinet, im Wasser sich völlig auflösen, und wieder crystallisiren läßt, und wenn es auf Kohlen geworfen wird, einen Knoblauch-Ge: ruch giebt.

Viertes Capitel.

Von den brennlichen Mineralien.

§. 117.

Diese Classe enthält alle diejenigen Mineralien, welche die Eigenschaft haben, daß sie brennen, und zum Theil ganz verbrennen können. Sie lassen sich in drey Ordnungen eintheilen, nemlich in

1.) Erdharze,
2.) Schwefel,
3.) mit Erdharze durchdrungene Pflanzen.

§. 118.

Erdharze (Bitumina) sind mineralische Säfte, die mit einem starken Dampfe und Geruche brennen. Einige davon sind flüßige, einige aber feste Körper. Die flüßigen Erdharze sind:

1.) Naphtha,
2.) Bergöl,

die festen aber:

1.) Bergtheer oder Bergpech,
2.) Judenpech,
3.) Gagat,
4.) Steinkohlen,
5.) Bernstein oder Agtstein,
6.) Ropal,
7.) Ambra.

§. 119.

Naphta ist ein zartes, leichtes, bald weisses, bald gelbliches Oel, welches in einer Entfernung vom Feuer zu brennen anfängt.

§. 120.

Bergöl (Petroleum) ist ein dickes, schweres, braunröthliches oder gelbes Oel, welches in seiner reinen

inen Gestalt theils vor sich aus der Erde quillt, theils er in verschiednen Brunnen auf dem Wasser wimmend gefunden wird.

§. 121.

Bergtheer (Bitumen crassum) ist ein verdiktes Bergöl, nur etwas dunkler von Farbe und n einem unangenehmen Geruche.

§. 122.

Judenpech (Asphaltum) ist ein schwarzes nzendes, und im Feuer unangenehm riechendes dharz.

§. 123.

Gagat (Gagates) kömmt mit dem Judenpech ohl in Ansehung der Farbe, als auch in Ansehung übrigen Eigenschaften völlig überein, nur daß es l härter ist, und sich schleifen läßt, daher man öpfe daraus machen kann.

§. 124.

Steinkohlen (Lithantraces) sind nichts anes, als ein mit Erdharzen durchdrungenes schwarz, meistentheils schieferiges Gestein.

§. 125.

Bernstein oder Agtstein (Electrum Succinum) ist ein glatter durchsichtiger Körper, der im ier sehr angenehm riecht.

§. 126.

Kopal gleicht in Ansehung seiner Farbe, Geit und Schwere dem Bernstein, ist aber etwas icher.

§. 127.

Ambra (Ambra) ist ein leichtes, undurchsichtiges, von Farbe dunkles Erdharz, welches sehr angenehm riecht, und in Ostindien am Strande des Meeres gefunden wird.

§. 128.

Schwefel, welcher die zweyte Ordnung der verbrennlichen Mineralien ausmacht, ist ein mineralischer Körper, der in offenem Feuer fliesset, und bey starkem Feuer mit einer blauen Flamme und erstickenden Dampfe verbrennet.

§. 129.

Zu der dritten Ordnung der verbrennlichen Mineralien gehören die mit Erdharz durchdrungenen Vegetabilien, nemlich

1.) der Turf (Cespes bituminosus), welcher aus Gartenerde und aus Wurzeln von verschiednen Pflanzen besteht, die mit einem Erdharze durchdrungen sind.

2.) mit Erdharz durchdrungenes Holz (lignum fossile bituminosum), welches hier und da in der Erde gefunden wird.

Fünftes Capitel.

Von den Steinen.

§. 130.

Steine sind harte und fest zusammenhängende Körper, welche unter dem Hammer zerspringen, und im Wasser sich nicht auflösen lassen.

Man bemerkt unter denselben folgende Unterschiede. Einige werden im Feuer zu Kalk, einige zu Glas,

Glas, und andre hingegen bleiben unveränderlich. Viele sind nichts als eine mannigfaltige Vermischung von verschiedenen Steinen, Erden und andern mineralischen Körpern, und noch andere haben Abbildungen von Thieren oder Pflanzen. Daher man sie bequem unter fünf Ordnungen bringen kann;

1.) Kalkartige Steine,
2.) Glasartige Steine,
3.) Feuerfeste Steine,
4.) Felsarten,
5.) Gebildete Steine.

§. 131.

Kalkartige Steine im weitläuftigen Verstande sind alle diejenigen, welche im Feuer weich brennen, und wenn sie hernach mit Wasser vermischt werden, wieder erhärten. Hierzu gehören:

1.) die eigentlichen kalkartigen,
2.) die gypsartigen Steine.

§. 132.

Die kalkartigen Steine im engern Verstande brausen mit Scheide-Wasser, welches die gypsartigen nicht thun, und zerfallen, wenn sie vorher gebrannt worden sind, im Wasser mit grosser Erhitzung. Arten davon sind:

1.) der gemeine Kalkstein, aus welchen der Kalk zum Bauen gebrannt wird.

2.) der Marmor, welcher sich schleifen und poliren läßt.

3.) der Kalkspath, welches ein blättricher Stein ist.

4.) der Stinkstein (lapis fuillus), welcher nach Katzen-Urin riecht, wenn er gerieben wird, und schwarzgrau von Farbe ist.

5.) der Tupfstein (Tophus), eine verhärtete Kalkerde, die sich aus dem Wasser von selbst niederschlägt.

§. 133.

Gypsartige Steine sind:

1.) Gyps ein etwas grauer undurchsichtiger Stein.
2.) Alabaster, der aus kleinen glänzenden Theilen besteht, und Politur annimmt.
3.) Isländischer Crystall, ein klarer durchsichtiger Stein, der die Gegenstände verdoppelt.

§. 134.

Durch **glasartige Steine** (lapides vitrescentes), aus welchen die zweyte Classe der Steine besteht, werden alle diejenigen verstanden, welche mit fixen alcalischen Salzen im Feuer geschwinder als andre zu Glase werden. Hierzu gehören:

1.) Edelsteine,
2.) Kieselsteine,
3.) Hornstein,
4.) Sandstein,
5.) Schiefer.

§. 135.

Edelsteine (Gemmae) heissen alle sehr harte eckige Steine, welche durchsichtig sind, wenn sie geschliffen werden, und deren Arten verschiedene Farben haben. In Ansehung ihrer Härte folgen sie in dieser Ordnung auf einander:

1.) der **Diamant** (Adamas) der allerhärteste, dessen rohe Gestalt bald achteckig, bald rund, bald cubisch oder platt ist.
2.) der **Rubin**, welcher hochroth, bisweilen aber auch bleicher ist.
3.) der **Saphir**, ein himmelblauer,
4.) der **Topas**, ein goldgelber,
5.) der **Smaragd**, ein grüner,
6.) der **Chrysopras**, ein blaßgrüner,
7.) der **Chrysolith**, ein grüngelblicher,
8.) der **Amethyst**, ein violeter,
9.) der **Granat**, ein dunkelrother,
10.) der **Hyacinth**, ein rothgelber.

11.) der **Beryll** oder **Aquamarin**, ein grünblauer oder meergrüner,
12.) der **Tourmalin** oder **Aschentrecker**, ein dunkelbrauner Stein, welcher auf der Insel Ceylon im Sande gefunden wird, und wegen seiner electrischen Eigenschaften bekannt ist.

§. 136.

Kieselsteine (Silices) heissen hier alle diejenigen Steine, welche im Bruche glatt sind, und in verschiedener Gestalt und Farbe vorkommen. Dazu gehören:

1.) Der **gemeine Kiesel**, welcher im Feuer eine braune oder gelbliche Farbe erhält.
2.) **Quarzcrystalle**, worunter nicht nur der **Bergcrystall**, sondern auch der **Rauhtopas** und andere farbige Crystalle begriffen sind.
3.) **Flintenstein** oder **Feuerstein**, der von verschiedenen Farben gefunden wird.
4.) **Chalcedon** (Chalcedonius), welcher dem Flintensteine sehr gleicht, nur daß er meistentheils grau aussieht, etwas durchsichtiger ist, und eine bessere Politur annimmt.
5.) **Karneol** oder **Sarder** (Carniolus), welcher roth und ziemlich durchsichtig ist.
6.) Der **Onix**, ein halbdurchsichtiger Stein von verschiedener Farbe.
7.) Der **Opal**, ein milchfarbener Stein, der geschliffen mit verschiedenen Farben spielet.
8.) **Achat** (Achates), ein durchsichtiger Stein, wovon es verschiedene Arten in Ansehung der Farbe giebt.

§. 137.

Hornsteine (Lapides cornei) nennt man alle glasartigen Steine, welche im Bruche nicht glatt, sondern mehr körnig sind, mit dem Stahl, wie alle vorhergehenden, Feuer schlagen, wenig oder nicht durchsichtig sind, im Schleifen aber grösstentheils eine gute Politur annehmen. Hierunter gehören:

1.) Der Jaspis, wovon es verschiedene Arten giebt.
2.) Der Porphir, ein Stein von verschiedenen Farben.
3.) Der Lazurstein (Lapis lazuli), ein blau und weisser Stein mit goldfarbenen glänzenden Flecken.

§. 138.

Sandsteine werden alle diejenigen Steine genannt, die aus einem Gemische von Sande und verschiedenen Erdarten bestehen. Dazu rechnet man die **Schleifsteine, Mühlsteine und Filtrirsteine.**

§. 139.

Schiefer (Schisti) nennt man diejenigen glasartigen Steine, welche aus Tafeln oder Blättern bestehen, die sich gemeiniglich auch spalten lassen, mit Stahl aber nicht Feuer schlagen. Dazu gehören:

1.) der Dachschiefer, der zu Dächern gebraucht wird.
2.) der Tafelschiefer, aus welchem man Rechentafeln macht.
3.) der feine Wetzstein, der sich aber nicht spalten läßt, ob er gleich blätterich ist.
4.) der Probirstein (Lapis Lydius).

§. 140.

Feuerfeste Steine (Lapides apyri) heissen diejenigen, welche in dem gewöhnlichen Feuer ihre Gestalt behalten, und darinnen härter werden. Man hat davon dreyerley Gattungen, **blätteriche, aus Faden bestehende, und solche, die in derben Stücken** gefunden werden, und sich drehen lassen.

§. 141.

Zu den feuerfesten blättrichen Steinen gehören:

1.) das Wasserbley, welches eine Bleyfarbe hat, leicht ab-

abschwärzet, und daher zu den Bleystiften gebraucht wird.

2.) **Marienglas, rußisch Glas**, welches dem Glase an Farbe und Klarheit gleichkömmt, in ziemlich grossen Tafeln gefunden wird, und sich in sehr dünne Blätter spalten läßt.

3.) **Alle Arten von Glimmer, Katzengold oder Katzensilber**, (Mica) welches Steine sind, die aus kleinen glänzenden Blättern bestehn, welche im Feuer die Farbe des Goldes annehmen.

4) der **Talk** (Talcum) welcher aus dunkeln fett anzufühlenden Theilen bestehet.

§. 142.

ius Fäden bestehen:

1.) der **Amianth**, der aus einzelnen Fasern, die sich biegen und leicht trennen lassen, zusammengesetzt, und so leicht ist, daß er beynahe im Wasser schwimmet. Der sogenannte **Bergflachs**, aus welchem die unverbrennliche Leinwand gemacht wird; das **Bergleder** und das **Bergfleisch** sind Arten davon.

2.) der **Asbest**, welcher mit dem Amianth eine grosse Aehnlichkeit hat, nur daß er ungleich härter, nicht so biegsam, und auch schwerer ist, indem er allemal im Wasser zu Boden fällt.

§. 143.

Zu den feuerfesten Steinen, welche in derben tücken gefunden werden, und sich drechseln lassen, hören:

1.) der **Serpentinstein**, welcher eine grünliche Farbe, mit vielen kleinen weissen und schwarzen Flecken hat.

2.) der **Nierenstein** (Lapis nephriticus) welcher dem Serpentinstein sehr gleich kömmt.

3.) der **Speckstein**, welchen man von verschiedner Farbe findet.

§. 144.

Die Felsarten oder Wacken (Saxa) aus welchen die vierte Ordnung der Steine bestehet, sind aus allerley Gattungen von Erden, Steinen, metallischen und andern Theilen zusammengesetzt, und daher bald härter, bald weicher. Wegen ihrer gar zu verschiedenen Mischung pflegt man sie nicht weiter einzutheilen.

§. 145.

Die Steine der fünften Ordnung, die gebildeten Steine (Lapides figurati) haben ihren Namen daher erhalten, weil sie theils durch ihre ganze äusserliche Figur, theils durch die darauf befindlichen Abdrücke die Gestalt eines Körpers aus dem Thier- oder Pflanzenreiche zeigen. Es gehören also zu dieser Ordnung:

1.) Versteinerungen,
2.) Abdrücke,
3.) Naturspiele.

§. 146.

Die Versteinerungen (Petrefacta) entstehen aus den Körpern selbst, deren Figur sie vorstellen, wenn nemlich diese Körper nach und nach aufgelöset, und die leeren Zwischenräume derselben mit der steinichten Materie angefüllt werden.

§. 147.

Abdrücke sind Steine, auf welchen die Gestalten fremder Körper, die ehemals in ihnen gesteckt haben, als diese Steine noch weich gewesen, zu sehen sind.

§. 148.

Naturſpiele (Luſus naturae) ſind alle diejenigen Steine, welche durch einen ungefähren Zufall eine Aehnlichkeit mit Körpern aus den andern Naturreichen erhalten haben. Dergleichen ſind z. E. die **Käſeſteine**, welche die Figur eines Käſes haben, die **Wurſtſteine**, die aus rothen Jaſpis mit weiſſem Quarz vermiſcht beſtehen, und daher wie ein Stück Blutwurſt ausſehen, u. a. m.

Sechſtes Capitel.

Von den Metallen.

§. 149.

Metalle ſind mineraliſche Körper, welche alle andre an Schwere übertreffen, glänzend ausſehen, und im Feuer flüßig werden. Man findet dieſelben in der Erde theils **gediegen**, d. i. ganz rein, und mit andern Materien nicht vermiſcht, oder **vererzet**, d. i. mit Schwefel, Arſenik oder andern mineraliſchen Körpern genau vereinigt. Einige ſind ſehr biegſam, und laſſen ſich durch den Hammer treiben, andre ſind ſpröde, und können nicht gehämmert werden. Jene werden daher **eigentliche** oder **vollkommne Metalle**, dieſe aber **Halbmetalle** genannt.

§. 150.

Die **vollkommenen Metalle** pflegt man in **edle** und **unedle** einzutheilen. **Edle Metalle** heiſſen diejenigen, welche auf der Kapelle in dem gewöhnlichen Schmelzfeuer unzerſtöhrt bleiben; **unedle** hingegen diejenigen, welche auf derſelben durch das Feuer zerſtöhrt werden.

§. 151.

§. 151.

Zu den edlen Metallen gehören:

1.) Gold,
2.) Silber.

§. 152.

Das Gold ist das schwerste und biegsamste Metall von gelber Farbe, das sehr wenig elastisch ist, und daher nicht klinget. Man findet es niemals vererzet, sondern allemal gediegen.

§. 153.

Silber ist ein weisses, hartes, glänzendes Metall, und nächst dem Golde das zäheste. Es wird sowohl gediegen als auch vererzet gefunden.

§. 154.

Unedle Metalle sind:

1.) Kupfer, | 3.) Zinn,
2.) Eisen, | 4.) Bley.

§. 155.

Kupfer ist ein rothgelbes hellklingendes ziemlich geschmeidiges Metall, welches im Wasser und an der Luft grün beschlägt. Man findet es ebenfalls sowohl gediegen, als auch vererzet.

Aus Kupfer und Gallmey wird **Meßing**; aus Kupfer und Zinn **Prinzmetall**; und aus Kupfer und Zink **Tomback** gemacht.

§. 156.

Eisen ist ein weißgraues, klingendes Metall, das an Härte alle andre Metalle übertrift; es fliesset nicht leicht, ist sehr wenig zähe, bekömmt an der Luft

und im Wasser einen rothbraunen Rost, und ist das einzige Metall, das der Magnet ziehet. Es wird meistentheils vererzet, und nur selten gediegen gefunden.

Der Strahl wird aus Eisen durch wiederhohltes Ausglühen und Ablöschen gemacht.

§. 157.

Zinn ist ein weisses sehr weiches Metall, welches unter allen die geringste Schwere hat, und die übrigen Metalle spröde macht. Es wird niemals gediegen, sondern allemal vererzet gefunden.

§. 158.

Bley ist ein weiches, leichtflüßiges, dunkelfarbiges, und sehr biegsames Metall, das keinen Klang giebt, eine ziemliche Schwere hat, und im Feuer bald zerstöhrt wird. Man findet es in grosser Menge, aber niemals gediegen.

§. 159.

Die Halbmetalle haben zwar ein glänzendes Ansehen, wie die vollkommenen Metalle, und eine ziemliche Schwere, sie lassen sich aber nicht so, wie jene, durch den Hammer ausdehnen, und gehen bey starkem Feuer in Rauch auf. Es gehören dazu:

1.) Wißmuth,
2.) Zink,
3.) Spießglas,
4.) Robolt,
5.) Queckſilber,
6) *Platina del Pinto.*

§. 160.

Der **Wißmuth** (Bismutum) ist ein weisses und blätteriges Halbmetall, das im Feuer leicht fliesset, und nach und nach verfliegt. Er wird niemals vererzet, sondern allemal gediegen gefunden.

§. 161.

§. 161.

Der Zink (Zincum) hat eine weißblauliche Farbe, wird im Feuer sehr leicht zerstöhrt, und verbrennt mit einer grünlichen Flamme.

§. 162.

Das Spießglas (Antimonium) ist ein stahlfarbenes auch öfters ganz weisses und sprödes Halbmetall, mit glänzenden Strahlen.

§. 163.

Robolt (Cobaltum, Cadmia vitri caerulei) ist von bleicher, weißgrauer, bisweilen auch von anderer Farbe, harte, spröde und im Bruche feinkörnig; mit Sande und alkalischem Salze geschmolzen giebt er ein blaues Glas.

§. 164.

Das Queckſilber (Hydrargyrum, argentum vivum) ist ein flüßiges und weisses Halbmetall, das nach dem Golde die größte Schwere hat. Man findet es theils gediegen, theils vererzet. In einer sehr grossen Kälte wird es zu einem festen Körper.

§. 165.

Platina del Pinto ist ein Halbmetall, das man nur vor einiger Zeit in Amerika gefunden hat, und noch nicht hinlänglich kennet. Es kömmt dem Golde am Gewichte sehr nahe, und besteht aus einzelnen, theils weißlichen, theils bleyfarbenen Körnern von einer unbestimmten Gestalt, welche sich theils hämmern lassen, theils spröde sind, und wovon der Magnet einen Theil an sich ziehet.

Die Metaphysik.

Einleitung.

§. 1.

Ungeachtet unter den Philosophen noch immer über den Begriff der Metaphysik gestritten wird, so kommen sie doch alle darinnen mit einander überein, daß die Lehren von den allgemeinen Eigenschaften der Dinge, von dem Daseyn und den Eigenschaften Gottes, von dem Wesen einer Welt überhaupt, und von den Eigenschaften eines Geistes diejenigen Gegenstände sind, mit denen sich die Metaphysik beschäftigen müsse. Der erste Theil derselben, welcher die allgemeinen Eigenschaften der Dinge erkläret, heißt die **Ontologie**; der andre Theil, welcher von dem Daseyn und den Eigenschaften Gottes handelt, die **natürliche Theologie**; der dritte, welcher das Wesen einer Welt überhaupt betrachtet, die **Cosmologie**; und der vierte, welcher die Eigenschaften eines Geistes untersucht, die **Pnevmatologie**, von welcher einige noch die **Psychologie** unterscheiden, die sich mit Betrachtung der Seele beschäftiget. Wir wollen aber hier nur, um unsre jungen Leser nicht durch allzuviele metaphysische Subtilitäten zu ermüden, die drey vornehmsten Theile, nemlich die Ontologie, die natürliche Theologie, und die Pnevmatologie kürzlich abhandeln.

§. 2.

§. 2.

Wenn man also die Gegenstände erwägt, womit sich die Metaphysik beschäftiget, so wird man den Werth und den Nutzen dieser Wissenschaft nicht in Zweifel ziehen können. Denn was kann wichtiger seyn, als die Lehre von Gott und von der Natur unsrer Seele? Es ist zwar freylich wahr, daß nicht alle Erklärungen und Beweise der Metaphysik vollkommen evident und überzeugend sind; denn wie wäre es möglich, daß Menschen, deren Fähigkeiten so sehr eingeschränkt sind, so erhabene Materien völlig ergründen könnten? Allein auch das wenige, was sie überzeugendes enthält, muß uns schätzbar seyn, da es so wichtige Wahrheiten betrift, die keinem vernünftigen Menschen gleichgültig seyn können.

§. 3.

Alles, was in der Metaphysik gelehrt wird, gründet sich auf folgenden Satz, den man als den ersten Grundsatz der menschlichen Erkenntniß betrachten kann: **Was uns das Wesen unsers Verstandes als wahr zu denken nöthiget, das ist wahr, und was wir gar nicht, oder nicht anders, als falsch denken können, das ist falsch.** Wir räumen daher ohne Widerrede ein, daß nichts zugleich seyn und nicht seyn könne, welches man den Satz des Widerspruchs (principium contradictionis) nennt, weil es uns unmöglich fällt, das Seyn und Nichtseyn einer und eben derselben Sache zu denken. Aus eben dem Grunde geben wir auch ohne weitern Beweis diesen Satz zu, daß nichts ohne eine zureichende Ursache entstehe, welches der Satz von der zurei-

chen-

chenden Ursache (principium rationis sufficientis) genannt wird; denn die Natur unsers Verstandes zwingt uns bey einem endlichen Dinge, ein anderes vorauszusetzen, durch dessen Kraft es hervorgebracht worden ist.

Erstes Capitel.

Von den allgemeinen Eigenschaften der Dinge.

§. 4.

Alles dasjenige, wovon man sich einen Begriff bilden kann, wird im weitläuftigen Verstande ein **Ens** oder **Ding** genannt. Was sich aber nicht denken läßt, z. E. ein viereckigter Cirkel, heißt ein **Unding** oder **Nonens**. In der engern Bedeutung aber legt man den Namen eines Dinges nur demjenigen bey, das auch ausserhalb unsrer Gedanken wirklich vorhanden ist, daher man einen Unterschied zwischen den **wirklichen** und den **möglichen** Dingen zu machen pflegt.

§. 5.

An jedem **Dinge**, im engern Verstande genommen, ist vorzüglich die **Existenz** oder **Wirklichkeit** und das **Wesen** zu bemerken. Der Begriff der Existenz ist so einfach, daß man ihn nicht gut erklären kann; daher wir uns bey den Definitionen desselben, über die immer noch gestritten wird, nicht aufhalten wollen, zumal da die eigentliche Bedeutung dieses Worts keinem unbekannt seyn wird. Jedermann weiß, daß man z. E. der Sonne und dem Monde die **Existenz** oder **Wirklichkeit**, hingegen einem

nem goldenen Berge nur die blosse Möglichkeit zuschreibt. Man pflegt aber zwischen der **metaphysischen** oder **idealen**, und zwischen der **physischen** oder **realen** Möglichkeit einen Unterschied zu machen. **Metaphysisch** oder **ideal möglich** heißt alles dasjenige, dessen Begriff nichts widersprechendes enthält. Die **physische** oder **reale** Möglichkeit aber findet nur alsdenn statt, wenn man auch annehmen kann, daß zu dem gedachten Dinge zureichende Ursachen wirklich vorhanden sind. Daß ein gemeiner Schäfer König werden kann, ist blos metaphysisch möglich, daß aber ein Cronprinz in wenig Jahren König seyn kann, ist eine reale Möglichkeit. Durch das metaphysische **Wesen** versteht man hier den Inbegriff alles dessen, was man bey einem Dinge denket, und wodurch man es von andern unterscheidet. Jeder Theil des Wesens, wie fern er besonders betrachtet wird, heißt eine **Eigenschaft** (qualitas), und kömmt dieselbe einem Dinge zu allen Zeiten und bey allen Umständen zu, so wird sie ein **Attribut** oder eine **wesentliche Eigenschaft** genannt: ist sie aber nur bisweilen darinnen anzutreffen, so heißt sie ein **Modus** oder eine **zufällige Eigenschaft**. Man braucht das Wort **Wesen** aber auch noch auf andre Art; denn bisweilen versteht man durch dasselbe nur die Summe der Eigenschaften, welche einem Dinge beständig zukommen; dieses wird daher von einigen Weltweisen zum Unterschiede von jenem das **logikalische Wesen** genannt. Bisweilen nimmt man es in einer noch engern Bedeutung, und zeigt dadurch blos dasjenige an, was in einem Dinge das erste, und nicht wiederum in andern Eigenschaften desselben gegründet ist, worinnen aber alles übrige

seinen Grund hat, was dem Dinge zukömmt. Man pflegt es daher auch das **Grundwesen** zu nennen.

§. 6.

Wenn ein Ding in der Verfassung, wie man es denket, ohne Verbindung mit einem andern seyn kann, so nennt man es ein **vollständiges Ding** (ens completum), oder eine **Substanz**. Ist aber ein Ding an ein andres nothwendig verknüpft, so daß es ohne das andre nicht existiren kann, so heißt es ein **unvollständiges Ding** (ens incompletum) z. E. ein **Stern**, ein **Haus** ist ein vollständiges, hingegen die **Gelehrsamkeit**, das **Fieber** und alle **Eigenschaften** sind unvollständige Dinge, weil keine Gelehrsamkeit ohne Gelehrten, kein Fieber ohne eine fieberhafte Person, und überhaupt keine Eigenschaft ohne Verbindung mit etwas andern existiren kann.

§. 7.

Man schreibt einem Dinge eine **Kraft** zu, wenn durch dasselbe ein ander Ding möglich ist. Die Kraft heißt **lebendig**, wenn durch dieselbe wirklich etwas hervorgebracht wird; hingegen **todt**, wenn ihre Thätigkeit verhindert wird.

§. 8.

Dasjenige Ding, durch dessen Kraft etwas hervorgebracht wird, heißt die **Ursache** oder der **Grund** von dem andern Dinge, und dieses letztere der **Effect** oder die **Wirkung** des erstern. Es ist aber dasjenige, dessen Hervorbringung man einem andern Dinge zuschreibt, entweder nur die Erkenntniß in unserm Verstande, oder die Sache selbst; daher wird der

Grund in den Erkenntniß- oder Ideal-Grund (principium cognoscendi), und den Real-Grund (principium essendi vel fiendi) eingetheilt.

§. 9.

Unter die Eigenschaften, welche allen Dingen ohne Ausnahme zukommen, gehört die **Einheit, Wahrheit** und **Vollkommenheit**, woran niemand zweifeln wird, dem die metaphysische Bedeutung dieser Wörter bekannt ist. Durch die **Einheit** versteht man nichts anders, als die Verknüpfung alles dessen, was zu einem Dinge gehört; die **Wahrheit** im metaphysischen Verstande ist eben so viel, als die Wirklichkeit oder Möglichkeit eines Dinges selbst; und **Vollkommenheit** heißt hier so viel, als der Inbegriff aller Eigenschaften eines Dinges, die nicht in einer Verneinung bestehen. Nun würde es also wohl überflüßig seyn, zu beweisen, daß jedes Ding **eins, wahr** und **vollkommen** ist. Das Wort Vollkommenheit wird auch noch in einer andern Bedeutung gebraucht, da es so viel heißt, als jede nützliche Eigenschaft eines Dinges. Diese Bedeutung liegt zum Grunde, wenn gefragt wird, ob diese oder jene Sache eine Vollkommenheit oder Unvollkommenheit zu nennen sey? Man kann also das Laster **vollkommen** nennen, weil es alles hat, was zum Begriff des Lasters erfordert wird, man kann aber nicht sagen, das Laster sey eine **Vollkommenheit**, weil es keine nützliche Eigenschaft ist, wenn man es mit der Bestimmung und der Natur des Menschen vergleicht.

§. 10.

Ausser den schon angeführten Eintheilungen der Dinge

Dinge pflegt man dieſelben noch in einfache und zuſammengeſezte, in endliche und unendliche, in nothwendige und zufällige einzutheilen, von deren Unterſchieden jezt noch kürzlich gehandelt werden ſoll.

§. 11.

Einfach nennt man überhaupt dasjenige, was nicht aus Theilen beſtehet, und zuſammengeſezt dasjenige, was Theile hat. Mit dem Wort Theile aber pflegt man nicht immer einerley Begriff zu verbinden, daher es kömmt, daß die Wörter einfach und zuſammengeſezt nicht immer einerley Bedeutung haben. Im weitläuftigen Verſtande heißt ein Theil jedes von dem mannigfaltigen, welches man ſich bey einer Sache vorſtellen, und in Gedanken von den übrigen Dingen, mit denen es verbunden iſt, abſondern kann. Im engern Verſtande aber nennt man nur diejenigen verſchiednen Dinge, aus welchen etwas beſtehet, Theile, die ſich nicht nur von einander in Gedanken unterſcheiden, ſondern auch wirklich von einander trennen laſſen, ſo daß nach der Trennung die übrigen noch fortdauern. Man pflegt daher zwiſchen Gedanken-Theilen und wirklichen Theilen einen Unterſchied zu machen. Nemlich die Gedanken-Theile entſtehen blos durch eine Unterſcheidung des mannigfaltigen in dem Verſtande, die wirklichen Theile aber durch die Trennung der Dinge, aus welchen eine Sache beſtehet. Hieraus wird man alſo die beyden Bedeutungen der Wörter einfach und zuſammengeſezt leicht einſehen können. Nemlich einfach heißt bisweilen dasjenige, worinnen man keine Theile unterſcheidet, bisweilen aber dasjenige, welches nicht aus verſchiednen trenn-

baren Dingen bestehet. Eben so zeigt das Wort **zusammengesetzt** nach der einen Bedeutung ein Ding an, in welchem sich verschiedne Dinge unterscheiden lassen, und nach der andern Bedeutung heißt es ein solches Ding, das aus wirklichen trennbaren und mit einander verbundenen Dingen bestehet. Das letztere pflegt man die **wahre** oder **reale**, und das erstere die **ideale Zusammensetzung** zu nennen, durch welche Beywörter man auch die beyden verschiednen Arten der Einfachheit unterscheidet.

§. 12.

Die **einfachen Substanzen**, welches also, wenn von einer wahren Einfachheit die Rede ist, solche sind, die nicht aus andern trennbaren Substanzen bestehen, werden auch **Monaden** genannt. Diejenigen Monaden, welche die Kraft zu denken haben, heissen **Geister**, diejenigen aber, aus denen die Körper zusammengesetzt sind, **Elemente**, deren Existenz aus der Existenz der Körper erwiesen wird, ob es uns gleich wegen der Unvollkommenheit unsrer Sinne nicht möglich ist, die Theilung der Körper bis auf die Elemente fortzusetzen.

§. 13.

Endlich heißt dasjenige, was noch einer Vermehrung fähig ist, **unendlich** aber, was so beschaffen ist, daß sich keine Vermehrung desselben gedenken läßt. Der Begriff der **Unendlichkeit** verbunden mit dem Begriffe der **Dauer**, d. i. der fortgesetzten Existenz giebt den Begriff der **Ewigkeit**, welche also in einer unendlichen Dauer bestehet.

§. 14.

Nothwendig ist dasjenige, dessen Gegentheil

eine

eine Unmöglichkeit enthält, und was ſich alſo nicht anders denken läßt; **zufällig** hingegen heißt alles das, deſſen Gegentheil ebenfalls möglich iſt, und was ſich alſo auch anders denken läßt. Daß ein Theil weniger enthält, als das Ganze, iſt etwas nothwendiges, die heutige ſchöne Witterung aber etwas zufälliges. Man theilt die Nothwendigkeit in die **abſolute** und **hypothetiſche** ein. **Abſolut** oder **unbedingt nothwendig** heißt dasjenige, deſſen Gegentheil ſchlechterdings nicht möglich iſt, und **hypothetiſch** oder **bedingt nothwendig**, deſſen Gegentheil nur wegen gewiſſer Umſtände nicht ſtatt findet. So iſt es z. E. abſolut nothwendig, daß die drey Winkel in einem geradelinichten Triangel 180 Grad ausmachen, hingegen nur hypothetiſch nothwendig, daß ein raſender Menſch unvernünftig handelt.

Zweytes Capitel.

Von GOtt.

§. 15.

Durch das Wort GOtt verſtehen wir eine mit Verſtand begabte, nothwendige und von der Welt unterſchiedene Subſtanz, durch welche die Welt hervorgebracht worden iſt. In dieſem Begriffe kommen alle verſchiedene Religionsſecten mit einander überein, daher wir jetzt keine andre Erklärung vorausſetzen können, um das Daſeyn GOttes zu beweiſen, weil ſonſt der Beweis nicht für jedermann ſeyn würde.

§. 16.

Es leugnet niemand, daß etwas exiſtirt. Denn auch die Idealiſten, das heißt, diejenigen Leute, welche

die Existenz der Körper leugnen, geben doch das Daseyn der Geister zu, und selbst die Egoisten, wodurch man diejenigen versteht, die das Daseyn aller andern Dinge, ausser ihrer eigenen Person, in Zweifel ziehen, räumen doch ihre eigne Existenz ein. Wenn es also gewiß ist, daß etwas existirt, z. E. daß wir existiren, so läßt sich hieraus folgendergestalt auf das Daseyn GOttes schliessen: Nemlich entweder wir sind nothwendig und von Ewigkeit her gewesen, oder wir sind ohne alle Ursache entstanden, oder wir haben uns selbst hervorgebracht, oder wir haben unser Daseyn einem höhern Wesen zu danken. Es würde aber lächerlich seyn, zu behaupten, daß wir nothwendig und von Ewigkeit her gewesen wären, da die Einschränkung und Veränderlichkeit unsers Wesens eben so sehr als unsre innere Empfindung uns von unsrer Endlichkeit und Zufälligkeit überzeuget. Zu glauben, daß wir ohne Ursache entstanden wären, streitet wider einen der Hauptgrundsätze der menschlichen Vernunft, daß nichts ohne Ursache entstehet. Daß wir uns selbst sollten hervorgebracht haben, ist unmöglich; denn wir müßten in dem Augenblicke, da wir uns hervorgebracht hätten, zugleich existirt und auch nicht existirt haben, welches einen Widerspruch enthält. Es bleibt also nichts weiter übrig, als das letzte Glied, daß wir nemlich unsern Ursprung einem höhern Wesen zu verdanken haben. Dieses Wesen aber kann nicht zufällig, wie wir, seyn, sonst würde es ebenfalls eine Ursache nöthig haben. Es muß also nothwendig, und zwar mit Verstand begabt seyn, welches der künstliche Bau unsers Körpers, und die Natur unsrer Seele auser Zweifel setzt. Folglich ist klar, daß es ein nothwendiges und verständiges Wesen

sen giebt, das von uns unterschieden, und die Ursache von unserm Daseyn ist. Da nun ein solches Wesen GOtt genannt wird, so ist das Daseyn eines GOttes hierdurch richtig erwiesen.

§. 17.

Aber, werden vielleicht einige unsrer jungen Leser gegen den vorigen Beweis einwenden, wir sind ja von unsern Eltern, und diese wieder von ihren Eltern u. s. w. entstanden, wie läßt sich denn also behaupten, daß wir unmittelbar unser Daseyn von einem höhern Wesen erhalten hätten? Es ist also zu merken, daß die Zeugung der Menschen und Thiere zwar im gemeinen Leben ein Hervorbringen ihres gleichen genannt wird, aber keine eigentliche Hervorbringung ist, wenn man dieses Wort in derjenigen Bedeutung nimmt, wie es bisher genommen worden ist, da es so viel heißt, als die einzige und hinlängliche Ursache von etwas seyn. Die Menschen und die Thiere überhaupt thun bey der Zeugung weiter nichts, als daß sie einander durch ihre Vereinigung in diejenigen Umstände setzen, welche zu der Entwickelung der jungen Frucht, die in der Mutter verborgen liegt, nothwendig sind. Die Eltern sind daher eben so wenig die eigentliche Ursache der Kinder, als ein Gärtner die Ursache von den Blumen und Früchten ist, ob er gleich dadurch, daß er den Saamen derselben in die Erde streut, und dieselbe befeuchtet, ihnen die Gelegenheit zu ihrer Entwickelung verschaffet. Wir können auch überhaupt von uns nicht sagen, daß wir im eigentlichen Verstande fähig wären, das geringste hervorzubringen. Die größten Künstler können nur im poetischen Stil Schöpfer genannt werden, denn sie thun weiter

nichts, als daß sie die schon vorhandenen und von GOtt erschaffenen Dinge auf eine gewisse Art mit einander verbinden.

§. 18.

Wer nicht zu der Secte der Egoisten oder Idealisten gehöret, die auch so zahlreich eben nicht zu seyn pflegt, und also an dem Daseyn der Körper und andrer Dinge ausser ihm nicht zweifelt, der kann sich noch auf verschiedene andere Arten, z. E. aus der Betrachtung des Weltgebäudes und dessen Regelmäßigkeit von der Existenz Gottes überzeugen. Das Weltgebäude ist ein Ganzes von einer erstaunenswürdigen Grösse, das aus unzählig vielen Theilen besteht, die alle mit einander auf das genaueste und ordentlichste verbunden sind. Die Erde, welche wir bewohnen, obgleich ihr Umfang 5400 deutsche Meilen beträgt, ist noch etwas sehr kleines in Ansehung der meisten übrigen Weltkörper, die wir an dem gestirnten Himmel erblicken. Der Saturn ist 875, der Jupiter 1250 und die Sonne 1228108 mal grösser, als unsre Erde, und es ist sehr wahrscheinlich, daß jeder Fixstern eine Sonne ist, und eben solche Planeten um sich hat, wie unsre Sonne, nur daß dieselben wegen der grossen Entfernung nicht gesehen werden können; denn die Weite des nächsten Fixsterns von unsrer Erde beträgt, nach der Bestimmung der neuern Astronomen, fast 8 Billionen deutsche Meilen, so, daß eine Canonkugel, wenn sie sich auch beständig mit eben der Geschwindigkeit bewegte, mit welcher sie aus einer stark geladenen Canone fährt, doch Millionen Jahre nöthig haben würde, um den nächsten Fixstern zu erreichen. Nun überlege man einmal, wie weit diejenigen Sterne

ent-

entfernt seyn müssen, welche man kaum durch die besten Ferngläser erblicket, und wie erstaunend groß also blos derjenige Theil des Weltgebäudes seyn müsse, den wir noch mit unsern Augen sehen können! Und alle diese ungeheuern Körper bewegen sich mit der grösten Ordnung seit undenklichen Jahren, und sind dergestalt mit einander verbunden, daß keiner den andern in seiner Bewegung verhindert, und daß immer der eine das nöthige Licht und die nöthige Wärme von dem andern erhalten kann. Hätte die Erde eine andere Stellung gegen die Sonne, so würde sie unmöglich von uns bewohnt werden können; denn wäre sie der Sonne näher, so würden wir vor Hitze verschmachten, und wäre sie weiter von ihr entfernt, so würden wir vor Kälte umkommen müssen. Ja diese bewundernswürdige Regelmäßigkeit findet man so gar in den kleinsten Theilen, aus denen die Welt zusammen gesetzt ist. Der geringste Wurm, die schlechteste Pflanze ist eine künstliche Maschine, die der geschickteste Künstler nicht völlig nachzuahmen im Stande ist. Sollte sich nun aus dieser künstlichen und regelmäßigen Einrichtung des ganzen Weltgebäudes und aller seiner Theile nicht ohne alle Gefahr zu irren schliessen lassen, daß dieses vortrefliche Ganze eine verständige und von der Welt unterschiedene Ursache haben, d. h. daß nothwendig ein GOtt existiren müsse? Denn wie ungeräumt wäre es, mit den Epicuräern zu glauben, daß die Welt durch einen ungefähren Zufall, durch einen Zusammenstoß unbelebter und von Ewigkeit her existirender Atomen entstanden sey. Würde wohl jemand bey Betrachtung eines nur mittelmäßigen Pallastes auf die Vermuthung gerathen, daß Ziegeln, Stei-

ne und Holz einmal von ohngefähr zusammen geflogen wären, und dadurch dieses regelmäßige Gebäude verursacht hätten? Und gleichwohl ist der Bau und die Einrichtung des künstlichen Pallastes, aus welcher man auf einen verständigen Baumeister zu schliessen pflegt, in Vergleichung mit dem Bau und der Einrichtung der Welt für nichts zu halten; wie sollte man also wohl nur einen Augenblick an dem Daseyn Gottes zweifeln können?

§. 19.

Man findet in den Schriften der Philosophen noch eine Menge andrer Beweise für die Existenz Gottes, die aber freylich nicht alle von einerley Werthe sind. Cartesius und nach ihm verschiedene andere Gelehrte, denen die jetzt erklärten Beweise **a posteriori** nicht zureichend schienen, die Atheisten völlig zu überzeugen, haben versucht, das Daseyn Gottes auf geometrische Art **a priori** zu demonstriren. Sie definiren zuerst GOtt durch dasjenige Wesen, welches alle mögliche Vollkommenheit besitzet, beweisen die Möglichkeit eines solchen Wesens daraus, weil die Verbindung aller möglichen Vollkommenheiten nichts widersprechendes enthält, und schliessen alsdenn folgendergestalt:

Was alle mögliche Vollkommenheiten hat, das hat auch die Existenz, weil die Existenz selbst eine Vollkommenheit ist.
Nun ist GOtt ein Wesen, das alle mögliche Vollkommenheiten hat;
Folglich hat GOtt auch die Existenz.

Dieser Beweis scheint anfangs sehr einleuchtend und untadelhaft zu seyn. Der Obersatz ist ein Axioma, der Untersatz eine Erklärung, deren Möglichkeit erwiesen

wiesen worden ist, und aus beyden folgt die Conclusion augenscheinlich, daß GOtt die Existenz haben müsse. Allein, wenn man die Hauptbegriffe dieses Schlusses genau erwegt, und demselben, wie es die Gesetze der Logik erfordern, in jedem Satze einerley Bedeutung giebt, so läßt sich leicht einsehen, daß der Satz, welcher eigentlich erwiesen werden soll, nemlich: **Es existiret wirklich ein Wesen, welchem der Begriff GOtt zukömmt**, dadurch nicht erwiesen wird. Denn der Obersatz:

> Was alle mögliche Vollkommenheiten hat, das hat auch die Existenz,

kann nicht von einem wirklichen Dinge verstanden werden, weil sonst eine offenbare petitio principii begangen, oder ein Schluß mit vier Hauptbegriffen gemacht würde, sondern es muß hier blos von einem möglichen Dinge, d. h. von einer blossen Verbindung der Begriffe in Gedanken die Rede seyn, weil man nichts, als die Möglichkeit des vollkommensten Wesens bey diesem Beweise voraus setzen kann. Folglich muß der vorige Satz und der ganze Schluß eigentlich also verstanden werden:

> Derjenige Begriff, in welchem ich mir alle mögliche Vollkommenheiten vorstelle, enthält auch den Begriff der Existenz;
> Der Begriff Gott ist ein Begriff, in welchem ich mir alle mögliche Vollkommenheiten vorstelle;
> Folglich enthält der Begriff Gott auch den Begriff der Existenz.

Da aber der Begriff des vollkommensten Wesens durch eine willkührliche Verbindung von Begriffen entstanden ist, so folgt hieraus noch nicht, daß auch wirklich eine Substanz ausserhalb unserer Gedanken vorhanden ist, welcher dieser Begriff zukömmt, (§. 8.

8. Vernunftlehre) wenn derselbe gleich nichts widersprechendes enthält. Der Atheist kann also immer einräumen, daß man bey dem Begriffe Gott, wie fern man das vollkommenste Wesen darunter versteht, auch den Begriff der Existenz denket, und gleichwohl immer noch an dem eigentlichen Daseyn Gottes zweifeln.

§. 20.

Unter den wahrscheinlichen Beweisen für die Existenz Gottes giebt es einige, die nicht zu verachten sind, zumal da sie von Ungeübten viel leichter, als andre verstanden werden können. Ein solcher Beweis ist derjenige, welcher aus der Allgemeinheit der Meynung, daß ein GOtt sey, hergenommen wird. Es ist beynahe kein Volk auf dem ganzen Erdboden bekannt, welches nicht einen Gott glauben sollte. Denn obgleich Locke verschiedene Schriftsteller anführet, die in den andern Welttheilen ganze Völker entdeckt haben wollen, bey denen kein Begriff von einem GOtt, keine Religion anzutreffen gewesen sey, so wird doch diesen von andern und neuern Nachrichten widersprochen, daß man also keine gegründete Ursache hat, an der Allgemeinheit dieser Meynung zu zweifeln. Wie wäre es aber möglich gewesen, daß sich die Meynung von der Existenz Gottes unter einer so grossen Menge von Völkern, wovon viele nicht die geringste Verbindung mit einander gehabt haben, hätte ausbreiten und so allgemein werden können, wenn sie nicht dem Wesen unsrer Vernunft und folglich der Wahrheit so gemäß wäre?

§. 21.

Aus dem Grundbegriffe, welcher bey dem Beweise

weise der Existenz Gottes zum Grunde gelegt worden ist, und aus der Betrachtung der natürlichen Dinge werden sich nunmehr leicht die vornehmsten göttlichen Eigenschaften herleiten lassen. Denn ist GOtt ein nothwendiges, mit Verstand begabtes Wesen, und der Schöpfer der ganzen Welt, so muß er auch ewig, independent und unveränderlich seyn; denn sonst würde er selbst unter die Dinge gehören, welche eine Ursache oder einen Schöpfer nöthig haben; er muß mächtig, weise und gütig seyn; wie wäre es sonst möglich gewesen, daß er eine Welt von solcher Vollkommenheit, von solcher Regelmäßigkeit, und mit so viel Guten aller Art angefüllt, hätte erschaffen können? Bey seinem Wesen, da er nothwendig und ewig ist, findet also keine Einschränkung, keine Vermehrung statt; d. h. er ist unendlich. Und weil das Zusammengesetzte aus trennbaren Theilen bestehet, und folglich einer Zerstörung fähig ist, so muß GOtt nothwendig einfach, und also ein Geist seyn, indem eine einfache denkende Substanz ein Geist genannt wird. Mit einem Worte, jede Vollkommenheit, die sich aus der Betrachtung der Welt erkennen läßt, muß ihm, als der Quelle aller dieser Vollkommenheiten im unendlichen Grade zukommen; hingegen alles Unvollkommne und Endliche, was wir an uns, und an andern Geschöpfen bemerken, muß von ihm gänzlich entfernt seyn. Man zählt daher unter seine Eigenschaften mit Recht die vollkommenste Erkenntniß aller Dinge, die vollkommenste Freyheit, Heiligkeit, Gerechtigkeit, Wahrhaftigkeit und Unveränderlichkeit in seinen Entschliessungen.

§. 22.

Aber, wird man vielleicht nunmehr fragen,

kann

kann man durch Hülfe der blossen Vernunft auch die Einheit GOttes erkennen? Diese Frage läßt sich in der That mit Ja beantworten, ob gleich in diesem Puncte, so wie in vielen andern die Unvollkommenheit unserer blos philosophischen Erkenntniß nicht zu leugnen ist. Alles, was in der Welt angetroffen wird, läßt sich aus der Setzung eines einzigen unendlichen Schöpfers vollkommen als möglich begreifen. Man hätte also nicht den geringsten Grund, mehr als einen GOtt anzunehmen, zumal da alle Theile der Welt, die zugleich sind, und auf einander folgen, in einer beständigen und genauen Verknüpfung mit einander stehen, welches den Satz, daß alle diese Dinge nur einen einzigen Urheber haben, aufs neue bestätiget.

§. 23.

Nachdem wir also gesehen haben, daß sich das Daseyn und die vornehmsten Eigenschaften GOttes durch Hülfe der blossen Vernunft erkennen lassen, so wollen wir noch eine kurze Betrachtung über die göttliche **Vorsehung** anstellen, wodurch nichts anders, als die Erhaltung und Regierung der Welt verstanden wird. Durch die Erhaltung GOttes dauern nicht nur die einfachen Substanzen und ihre Kräfte, sondern auch die Verbindung derselben unter einander fort. Daß aber dieselben einer Erhaltung nöthig haben, und nicht durch eigne Kraft ihre Existenz fortsetzen können, läßt sich aus ihrer Zufälligkeit und aus dem Satze von der zureichenden Ursache schliessen. Es ist ein sehr eitler Einwurf, den einige wider die göttliche Erhaltung der Welt zu machen pflegen, daß es eine Unvollkommenheit wäre, wenn GOtt eine Welt erschaffen hätte, die er zu erhalten brauchte, indem man ja einen Künstler für weit grösser hielte,

wenn sein Kunstwerk ohne fernere Arbeit fortdauerte, als wenn er es beständig durch neue Bemühungen in seiner Verfassung erhalten müßte. Denn wie kann man etwas zur göttlichen Vollkommenheit rechnen, das an sich unmöglich ist? Ein zufälliges Ding, das sich nicht durch eigne Kraft den Anfang seiner Existenz geben konnte, kann auch unmöglich die Ursache von der Fortsetzung seiner Existenz seyn. Gleichwie es nun der Vollkommenheit GOttes nicht zuwider ist, daß er nicht viereckige Cirkel, runde Quadrate, oder hölzernes Eisen machen kann, also läßt sich auch nicht behaupten, daß eine Welt, die einer Erhaltung bedarf, mit den Vollkommenheiten GOttes streite. Das von einem Künstler hergenommene Gleichnis schickt sich zur Erläuterung dieser Materie ganz und gar nicht, weil sich von einem Künstler nicht sagen läßt, daß er seine Maschine oder sonst ein Kunstwerk auf eben die Art mache und erhalte, wie GOtt die Welt gemacht hat und erhält, indem der Künstler den einfachen Dingen, aus welchen sein Werk bestehet, nicht die Existenz giebt, sondern sie blos auf gewisse Art mit einander verbindet, und daher auch bey der Erhaltung derselben nichts dazu beytragen kann, daß die Theile ihre Existenz fortsetzen. Es ist also nicht genau und philosophisch geredet, wenn man den Künstler die zureichende Ursache seiner Kunstwerke und ihrer Erhaltung nennet.

§. 24.

So wenig man nun an der göttlichen Erhaltung aller Dinge zweifeln kann, eben so wenig läßt sich auch die **Regierung GOttes**, d. h. die Abrichtung aller Begebenheiten und Veränderungen in der Welt zu seiner Absicht in Zweifel ziehen. Denn vermöge

seiner vollkommensten Weisheit kann GOtt die Welt nicht ohne Absicht erschaffen haben. Setzt man aber einmal eine gewisse Absicht GOttes bey der Schöpfung dieser Welt voraus, so muß man auch ferner zugeben, daß er zur Erreichung derselben die Dinge und Begebenheiten unter sich beständig so verknüpfen und leiten wird, daß dadurch seine Absichten am besten befördert werden. Diese göttliche Regierung aber kann sich nicht blos auf das Ganze beziehen, wie einige vorgeben, sondern muß sich auch auf die geringsten Theile und Veränderungen erstrecken. Denn besteht nicht das Ganze aus allen seinen Theilen zusammengenommen? und kann also wohl eine vollkommen gute Regierung des Ganzen ohne Regierung aller Theile statt finden? Es ist lächerlich, was einige behaupten, daß die Sorge für die geringsten Dinge in der Welt dem höchsten Wesen ganz unanständig seyn würde. Denn ist es ihm nicht unanständig gewesen, Fliegen, Mücken, und andre dergleichen Kleinigkeiten zu erschaffen, wie kann die Regierung derselben für etwas unanständiges gehalten werden? Daß sich Fürsten und Generale, welches Beyspiel man immer anzuführen pflegt, sich nur um das Ganze, und nicht um alle einzelne Dinge bekümmern, geschieht nicht deswegen, weil dergleichen Sorgfalt eine Unanständigkeit enthielte, sondern weil die menschliche Unvollkommenheit und Einschränkung dieselbe unmöglich machet, daher es auch kömmt, daß bey der Regierung der besten Fürsten beständig so viel Fehler vorgehen, welche vermieden werden könnten, wenn es ihnen möglich wäre, alle Kleinigkeiten zu wissen und einzurichten. Denn wie viel Beyspiele könnte man hier nicht anführen, um zu zeigen, daß oft die unwichtigste Sache die wich-

ligste Veränderung verursacht habe,* und daß also an der Regierung der Kleinigkeiten bey der Regierung eines weitläuftigen Ganzen sehr viel gelegen sey. Da nun alle diese menschlichen Unvollkommenheiten, wodurch die Sorge für alle einzelne Dinge unmöglich wird, bey GOtt, als dem vollkommensten Wesen, nicht statt finden, so hat man ja nicht die mindeste Ursache, die göttliche Regierung aller einzelnen Dinge und geringsten Begebenheiten in der Welt für zweifelhaft zu halten.

Drittes Capitel.

Von der Seele.

§. 25.

Wir sind uns und andrer Dinge bewußt, wir können nicht nur die Vorstellungen, die wir von den Dingen haben, auf verschiedene Art mit einander verbinden, welches mit einem Worte **Denken** heißt, sondern wir sind auch im Stande, nach diesen Vorstellungen zu handeln, welches **Wollen** genannt wird. Es muß also nothwendig etwas in uns seyn, welches die Kraft zu denken und zu wollen hat. Da man nun dasjenige, was die Kraft zu denken und wollen hat, eine **Seele** nennt, so ist offenbar, daß wir wirklich eine Seele haben. Nun fragt sichs also, in was für eine Classe von Dingen unsre Seele zu zählen sey, ob sie zu den vollständigen oder unvollständigen, zu den einfachen oder zu den zusammengesetzten Dingen gehöre? Diese Fragen müssen wir

* Eine Menge solcher Beyspiele enthält die aus dem französischen übersetzte Schrift: **Grosse Begebenheiten aus kleinen Ursachen.**

vor allen Dingen untersuchen, weil sie zu den folgenden Betrachtungen unentbehrlich sind.

§. 26.

Damit wir also erstlich urtheilen können, ob die Seele ein vollständiges Ding, eine Substanz sey oder nicht, so wollen wir sehen, ob es möglich sey, sie für ein unvollständiges Ding, für eine blosse Eigenschaft unsers Körpers zu halten. Sollte sie aber eine blosse Eigenschaft unsers Körpers seyn, so müßte alles Denken und Wollen in einer blossen Bewegung gewisser Theile unsers Körpers bestehen; denn alle Veränderungen, die durch Körper hervorgebracht werden können, sind Bewegungen. Wenn wir nun den Begriff von der Bewegung, welche nichts anders ist, als eine Veränderung des Raums, mit demjenigen vergleichen, was wir Bewußtseyn, und überhaupt denken und wollen nennen, so werden wir bey genauer Aufmerksamkeit finden, daß Bewegung, Denken und Wollen ganz verschiedene Dinge sind, und daß sich das Denken und Wollen aus der blossen Bewegung, als aus einer zureichenden Ursache nicht herleiten läßt. Wie könnte man z. E. glauben, daß unsere Begriffe von GOtt, von der Weißheit, von der Tugend und von so vielen andern abstracten Dingen nichts als Bewegungen körperlicher Theilchen wären? Besteht aber das Denken und Wollen nicht in einer Bewegung körperlicher Theile, so kann auch die Seele nicht für eine blosse Eigenschaft des Körpers gehalten werden, sondern sie muß ein von dem Körper unterschiednes Wesen, und also ein vollständiges Ding, eine mit besondern Eigenschaften begabte Substanz seyn.

§. 27.

Nunmehr laßt uns ferner untersuchen, ob die

Seele

Seele unter die zusammengesetzten oder einfachen Substanzen gehöre, d. h. ob sie aus andern trennbaren Substanzen bestehe oder nicht. (§. 12.) Gesetzt also, die Seele wäre aus wirklichen trennbaren Substanzen zusammengesetzt, so müßte entweder jede dieser einzelnen Substanzen, aus welchen die Seele bestünde, die ganze Kraft zu denken und wollen haben, oder das Denken und Wollen müßte etwas seyn, das nur durch die Zusammensetzung möglich würde. Wollte man nun das erste annehmen, so wäre die Seele nicht eine, sondern eine ganze Menge von denkenden Substanzen oder Seelen, indem einem jeden Theile, vor sich allein betrachtet, das ganze Wesen der Seele zukäme. Sollte aber das Denken und Wollen etwas seyn, das nur durch die Zusammensetzung möglich wäre, so müßten unsre Gedanken einen gewissen Raum einnehmen, und entweder in einer Bewegung oder in einer Wirkung der Bewegung bestehen. Da nun ein Gedanke, vermöge unsrer innern Empfindung, nichts ausgedehntes ist; denn wie wäre es z. E. möglich, das Bewußtseyn, einen abstracten Begriff, oder ein Verlangen als etwas zu denken, das einen Raum erfüllte? und da auch überhaupt das Denken und Wollen durch keine Bewegung begreiflich ist, wie wir schon im vorigen Paragraphen gesehen haben, so ist klar, daß Denken und Wollen nicht durch die Zusammensetzung entstehen könne, und daß also die Seele keine zusammengesetzte, sondern eine einfache Substanz seyn müsse.

§. 28.

Allein obgleich die Natur der Seele von der Natur des Körpers ganz verschieden ist, so ist doch die Seele, wie wir aus der Erfahrung wissen, mit dem

Körper auf das genaueste vereiniget. Mit den Veränderungen des Körpers sind gewisse Vorstellungen in der Seele verbunden; und so bald die Seele etwas will, entstehen in dem Körper die zur Erfüllung des Gewollten nöthige Bewegungen. Es fragt sich also, wie es zugehe, daß sich die Vorstellungen in der Seele nach dem Zustande des Körpers, und wiederum die Bewegungen des Körpers nach den Vorstellungen und dem Willen der Seele richten? Diese Frage wird in den Schulen der Philosophen nicht auf einerley Art beantwortet. Denn anders wird die Vereinigung des Leibes und der Seele von den Cartesianern, anders von Leibnitzen und seinen Nachfolgern, und noch anders von den meisten ältern und verschiednen neuern Weltweisen erkläret, welche drey verschiedne Meynungen wir jetzt kürzlich durchgehen wollen.

§. 29.

Nach der Meynung der Cartesianer, welche es für unmöglich halten, daß Geister und Körper in einander sollten wirken können, werden die Empfindungen der Seele nicht durch die Bewegungen des Körpers, und die Veränderungen des Körpers nicht durch die Wirkungen der Seele hervorgebracht, ohngeachtet Leib und Seele in ihren Veränderungen genau mit einander übereinstimmen, sondern diese Uebereinstimmung entsteht blos daher, weil GOtt von den Veränderungen des Leibes Anlaß nimmt, gewisse Veränderungen in der Seele selbst zu wirken; so wie er von dem Wollen der Seele Gelegenheit nimmt, diejenigen Bewegungen des Leibes, welche demselben gemäß sind, selbst hervorzubringen. Diese Art, die Vereinigung zwischen Leib und Seele zu erklären,

wird

wird daher das Syſtema cauſarum occaſionalium genannt.

§. 30.

Nach der Hypotheſe des Baron von Leibnitz wirken Leib und Seele ebenfalls nicht wirklich in einander, ſondern die Veränderung eines jeden entſtehet nach den Geſetzen ſeines eignen Weſens. Der menſchliche Körper iſt nichts anders, als eine künſtliche Maſchine, welche von dem Schöpfer ſo eingerichtet worden iſt, daß ſie durch ihre mechaniſche Structur, ohne Beyhülfe einer andern Subſtanz, alle mögliche Bewegungen hervorbringen kann. Auf eine ähnliche Art beſitzt die Seele die Fähigkeit, alle Gedanken, und ſelbſt die ſinnlichen Begriffe in ſich ſelbſt, ohne die Veranlaſſung des Körpers, zu erzeugen. Der Zuſtand, in welchem ſie ſich jeden Augenblick befindet, folgt aus demjenigen Zuſtande, in welchem ſie unmittelbar vorher war, und nicht aus dem Zuſtande oder der Bewegnng des Körpers. Leib und Seele aber ſind von dem Schöpfer dergeſtalt in Harmonie gebracht worden, daß alle Veränderungen in beyden, die zu einerley Zeit geſchehen, beſtändig zuſammentreffen und mit einander übereinſtimmen, und deswegen einander hervorzubringen ſcheinen. Leibnitz erläutert dieſes durch ein Gleichnis von zwey Uhren, die in keiner Verbindung mit einander ſtehen, aber dergeſtalt eingerichtet und geſtellt ſind, daß die eine in eben dem Augenblicke ſchläget, in welchem die andre dieſe Stunde zeiget. Dieſe Art der Verbindung zwiſchen Leib und Seele zu erklären, wird die **präſtabilirte Harmonie** genannt.

§. 31.

Nach der Meynung der übrigen Philoſophen,

welche weder die Cartesianische, noch die Leibnitzische Erklärungsart annehmen, entstehet die Uebereinstimmung zwischen Leib und Seele dadurch, daß der Leib in die Seele, und die Seele in den Leib wirket. Durch die Bewegungen der Nerven werden die Empfindungen in der Seele wirklich hervorgebracht oder doch möglich gemacht, so wie durch die Vorstellungen und das Wollen der Seele diejenigen Bewegungen im Körper entstehen, die damit übereinstimmen. Diese letztere Erklärungsart heißt daher das **System der physicalischen Verbindung** oder **des physicalischen Einflusses** (Systema influxus physici), und hat ohne Zweifel auch die größte Wahrscheinlichkeit, da die Cartesianische und Leibnitzische Meynung einer Menge Schwierigkeiten unterworfen ist. Denn nach dem System der Cartesianer muß man GOtt die Vollstreckung aller menschlichen Laster uud Schandthaten zuschreiben. Wenn z. E. ein Dieb oder Mörder den andern beraubte oder ermordete, so hätte eigentlich der Dieb nur die Vorstellung und den Willen von dieser schändlichen Handlung, der Diebstahl aber und der Mord selbst würde von GOtt, der den Körper regieret, unmittelbar vollstrecket. Allein wer sollte nicht einsehen, daß dieses alles der Heiligkeit und Vollkommenheit GOttes unmöglich gemäß seyn könne? Nach der Leibnitzischen Hypothese wäre der Körper ganz und gar überflüßig, weil darinnen angenommen wird, daß die Seele durch ihre eigne Kraft alle Empfindungen und übrigen Ideen hervorbringt; GOtt müßte also etwas ganz überflüßiges und unnöthiges gemacht haben, welches doch mit seiner vollkommensten Weißheit streitet. Man hat also immer viel mehr Ursache, die Meynung derer anzunehmen,

welche

welche eine wahrhaftige Wirkung der Seele in den Leib, und des Leibes in die Seele behaupten, ob wir gleich die Art und Weise, wie diese Wirkung geschiehet, nicht erklären können; denn das ist ganz unerweislich, was diejenigen vorgeben, welche das System des physicalischen Einflusses bestreiten, daß nemlich einfache und zusammengesetzte Dinge in einander nicht sollten wirken können.

§. 32.

Wenn nun durch den Tod die Verbindung des Leibes und der Seele unterbrochen wird, was für einen Zustand können wir nach der blossen Vernunft in Ansehung unsrer Seele erwarten? Der Leib wird, wie bekannt, bald nach der Trennung von der Seele gänzlich zerstört, d. h. in eine unzählige Menge kleiner Theile aufgelöset. Dieser Zerstörung aber kann die Seele nicht unterworfen seyn, weil sie einfach ist, und nicht, wie der Leib, aus trennbaren Theilen besteht. Sie muß also auch nach dem Tode noch fortdauern, wofern sie nicht derjenige, der sie aus nichts erschaffen hat, wieder in nichts verwandelt. Es fragt sich also, ob GOtt unsre Seele vernichten wolle oder nicht? Nun haben wir nicht die geringste Ursache, das erste anzunehmen, sondern wenn wir die göttlichen Eigenschaften betrachten, so finden wir eine Menge Gründe, die uns überzeugen, daß GOtt auch nach dem Tode unsre Seele in demjenigen Zustande erhalten werde, in welchem sie denken, und sich ihrer vorhergehenden Begriffe bewußt seyn kann. Unsre Seele ist eines beständigen Fortganges in der Vollkommenheit fähig, und gleichwohl ist das gegenwärtige Leben viel zu kurz, als daß sie ihre Kräfte völlig entwickeln könnte. Sollte sie nun nach der Trennung

von ihrem Leibe aufhören, so müßte ihr GOtt alle diese vortreflichen Fähigkeiten umsonst und ohne Absicht gegeben haben. Aber könnte man von dem weisesten und vollkommensten Geiste wohl glauben, daß er etwas vergebens thun, daß er ohne Absicht handeln sollte? Wir wissen auch aus unzähligen Erfahrungen, daß der Tugendhafte in diesem Leben oft unglücklich ist, und unbelohnt bleibet, so wie der größte Bösewicht oft bis an das Ende seines Lebens aller Arten von irrdischem Glücke geniesset. Sollte also für die Seelen der Menschen kein Leben nach der Trennung von ihren Leibern zu hoffen seyn, so müßten viele lasterhafte Handlungen ganz unbestraft, und viele tugendhafte Handlungen ganz unbelohnt bleiben; aber dieses läßt uns die Gerechtigkeit und Liebe des vollkommensten Wesens nicht als möglich denken. Wir haben also die gegründeteste Hoffnung, daß unsre Seele auch nach dem Tode noch fortfahren werde, zu denken, und sich ihres jetzigen Zustandes bewußt zu seyn, weil sonst keine Belohnungen und Strafen möglich seyn würden. Ob sie aber nach dem Tode ganz ohne Körper bleiben, oder wieder einen andern Körper erhalten werde, das ist eine Frage, zu deren Beantwortung die blossen Vernunftgründe nicht hinlänglich sind.

E N D E.

Inhalt.

Inhalt.

Vorbericht

	Seite
Von der Philosophie überhaupt.	1.

Die Vernunftlehre.

Erstes Capitel. Von der Logik überhaupt.	5.
Zweytes Capitel. Von den Begriffen.	8.
Drittes Capitel. Von den Sätzen.	11.
Viertes Capitel. Von den Definitionen.	18.
Fünftes Capitel. Von den Eintheilungen.	23.
Sechstes Capitel. Von den Schlüssen.	26.
Siebentes Capitel. Von den Beweisen.	40.
Achtes Capitel. Von der Wahrheit.	43.
Neuntes Capitel. Von der Lehrart.	48.

Die mathematischen Wissenschaften.

Vorbericht. Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.	51.

Die Arithmetik.

Erstes Capitel. Erklärungen und Grundsätze.	59.
Zweytes Capitel. Von den vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.	67.
Drittes Capitel. Von den vier Rechnungsarten in gebrochenen Zahlen.	100.
Viertes Capitel. Von den Quadrat- und Cubikzahlen.	120.
Fünftes Capitel. Von den Verhältnissen und Proportionen.	152.
Sechstes Capitel. Von den Progreßionen und Logarithmen.	180.
Anhang. Von den üblichsten Münzen, Maasse und Gewichte.	201.

Die

Inhalt.

Seite

Die Geometrie.

Erſtes Capitel. Erklärungen und Grundſätze. 207.
Zweytes Capitel. Von den Linien, Winkeln und Figuren, in Anſehung ihrer Gleichheit. 223.
Drittes Capitel. Von der Ausmeſſung der Figuren. 278.
Viertes Capitel. Von der Aehnlichkeit der Figuren. 290.
Fünftes Capitel. Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde. 309.
Sechſtes Capitel. Von den Körpern. 333.

Die ebene Trigonometrie.

Erſtes Capitel. Von den Erklärungen und allgemeinen Gründen der Trigonometrie. 363.
Zweytes Capitel. Von der Ausrechnung der Triangel. 387.
Tafel zur Meſſung der Bogen oder Winkel durch Hülfe der Chorden. 414.

Die Naturlehre.

Einleitung. 423.
Erſtes Capitel. Von den allgemeinen Eigenſchaften der Körper. 425.
Zweytes Capitel. Von den Unterſchieden der Körper. 437.
Drittes Capitel. Von dem Lichte. 439.
Viertes Capitel. Von dem Feuer. 444.
Fünftes Capitel. Von der Luft. 451.
Sechſtes Capitel. Von dem Waſſer. 455.
Siebentes Capitel. Von der magnetiſchen Materie. 459.
Achtes Capitel. Von der electriſchen Materie. 462.
Neuntes Capitel. Von der Erde. 466.
Zehntes Capitel. Von den Lufterſcheinungen. 468.

Die natürliche Geſchichte.

Einleitung. 477.

Erſte

Inhalt.

Seite

Erste Abtheilung.

Das Thierreich.

Erstes Capitel. Von der allgemeinen Eintheilung der Thiere. 479.
Zweytes Capitel. Von den säugenden Thieren. 481.
Drittes Capitel. Von den Vögeln. 484.
Viertes Capitel. Von den Amphibien. 486.
Fünftes Capitel. Von den Fischen. 487.
Sechstes Capitel. Von den Insecten. 489.
Siebentes Capitel. Von den Gewürmen. 492.

Zweyte Abtheilung.

Das Pflanzenreich.

Erstes Capitel. Von den Pflanzen und ihren vornehmsten Theilen überhaupt. 494.
Zweytes Capitel. Von der Eintheilung der Pflanzen in Classen. 499.

Dritte Abtheilung.

Das Mineralreich.

Erstes Capitel. Von den Mineralien überhaupt. 506.
Zweytes Capitel. Von den Erdarten. 508.
Drittes Capitel. Von den Salzen. 510.
Viertes Capitel. Von den brennlichen Mineralien. 514.
Fünftes Capitel. Von den Steinen. 516.
Sechstes Capitel. Von den Metallen. 523.

Die Metaphysik.

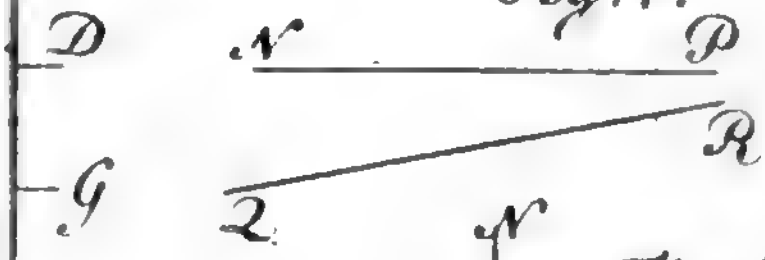
Einleitung. 527.
Erstes Capitel. Von den allgemeinen Eigenschaften der Dinge. 529.
Zweytes Capitel. Von GOtt. 535.
Drittes Capitel. Von der Seele. 547.

Digitized by Google

Tab. 1

Fig. 2

Fig. 4.



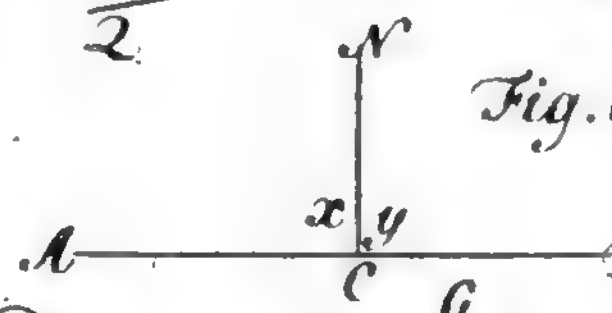


Fig. 6

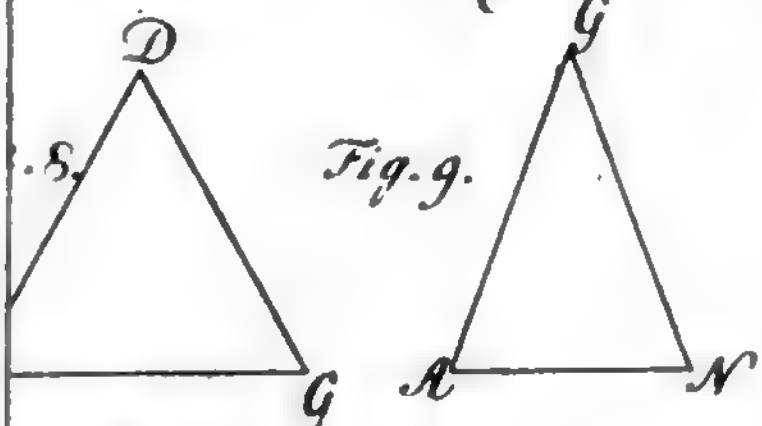


Fig. 9.

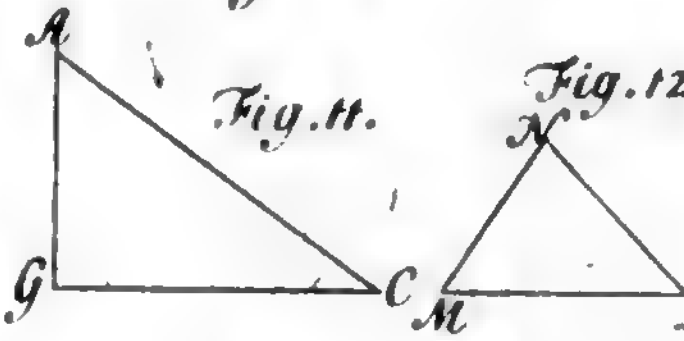
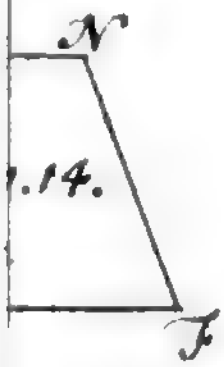


Fig. 11.

Fig. 12.



14.

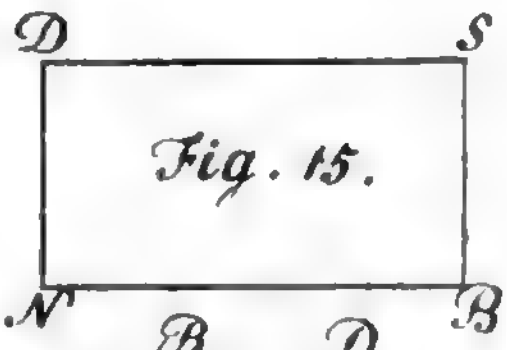
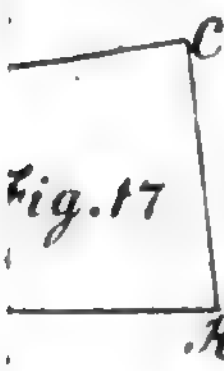


Fig. 15.



ig. 17

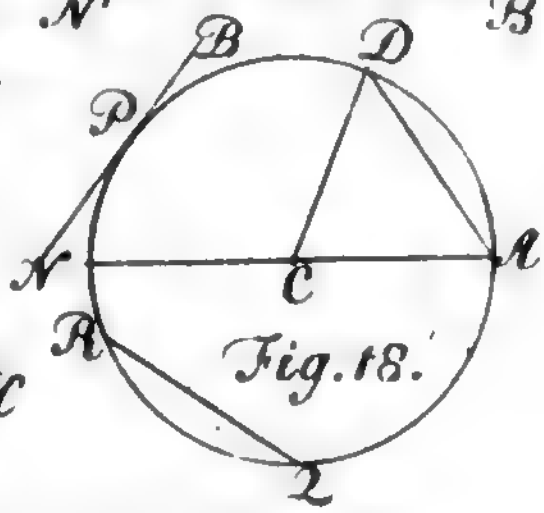
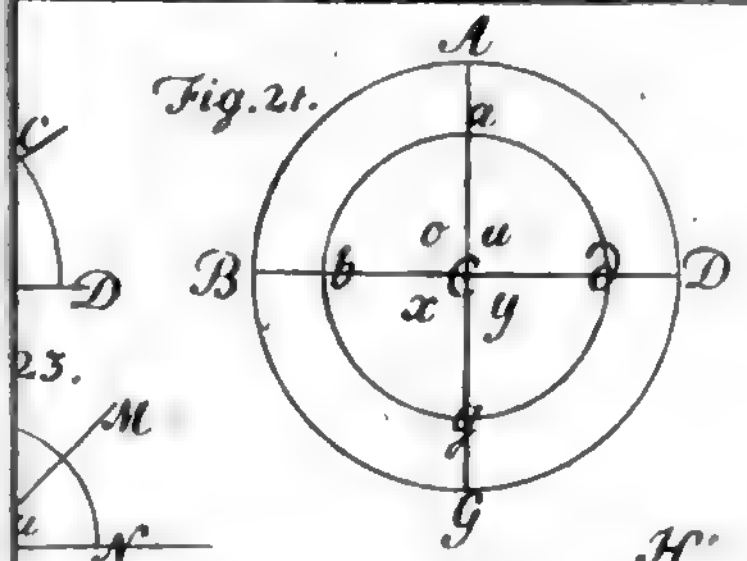


Fig. 18.

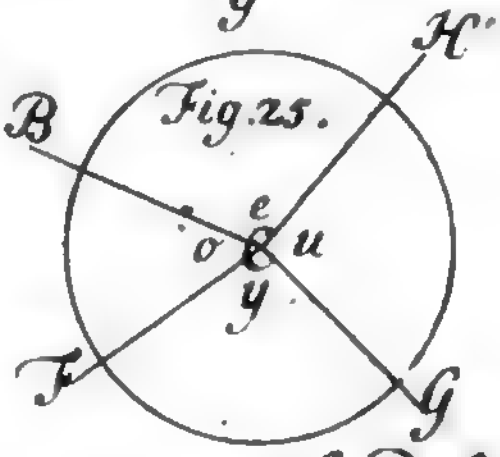
Digitized by Google

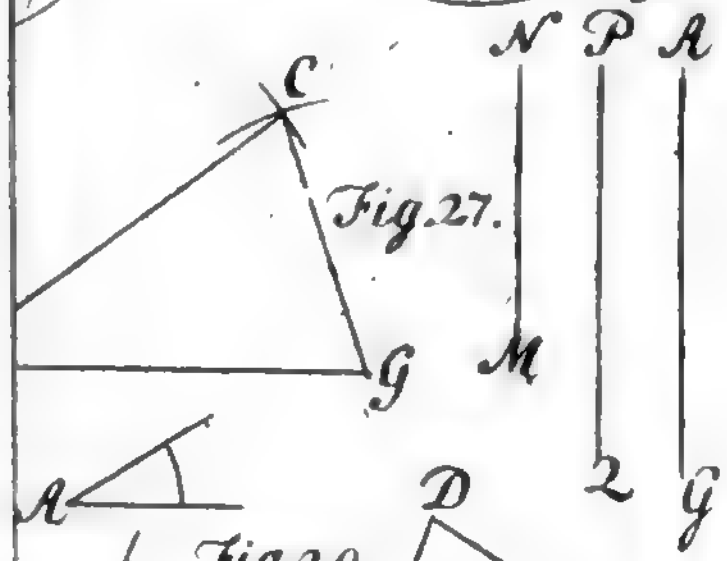
Fig. 21.



23.

Fig. 25.





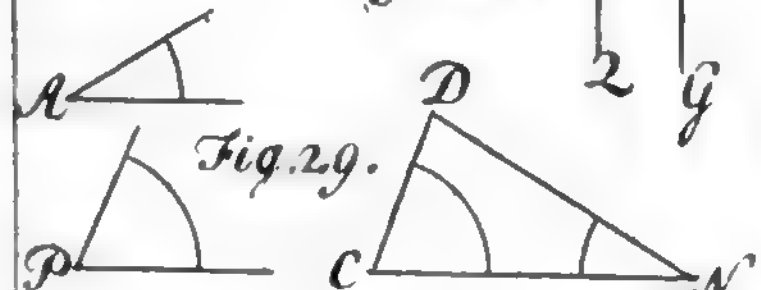
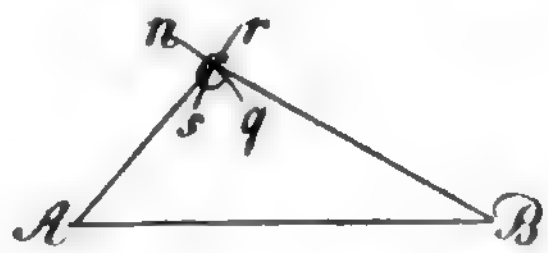


Fig. 30.



b

S

Fig. 32.

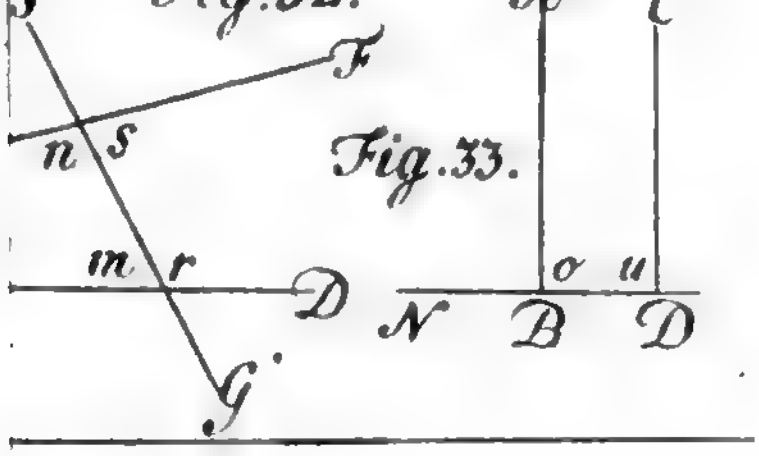
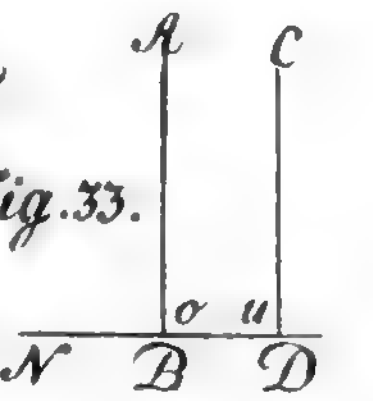
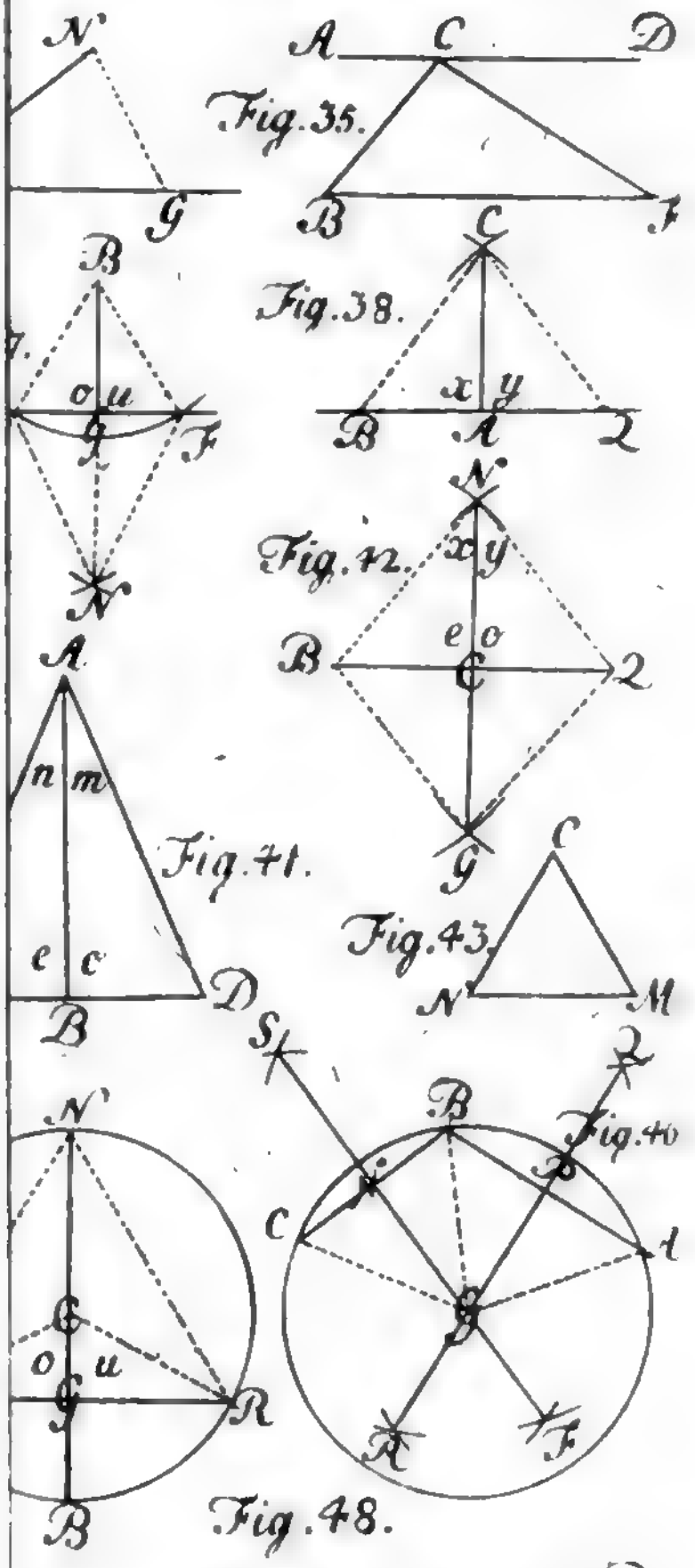


Fig. 33.



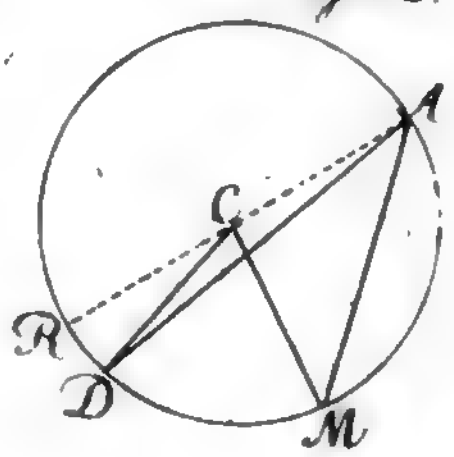
Digitized by Google


N
G
A
C
D
B
F
Fig. 35.
B
o
u
g
F
N
C
Fig. 38.
x
y
B
A
2
N
Fig. 42.
x
y
e
o
B
C
2
G
A
n
m
Fig. 41.
e
c
D
B
C
Fig. 43.
N
M
2
S
N
B
Fig. 40
C
A
1
O
o
u
g
R
B
R
F
Fig. 48.
N
D
n
x
y
m
2
S
L
A
B
u
e
y
e
D
2
Fig. 49.

Digitized by Google

Fig. 51.

Fig. 52.



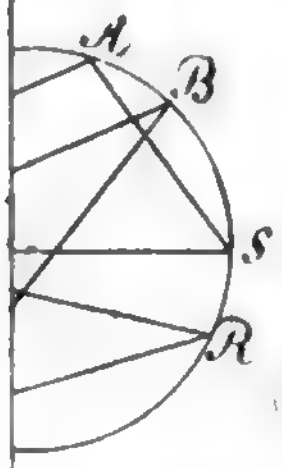
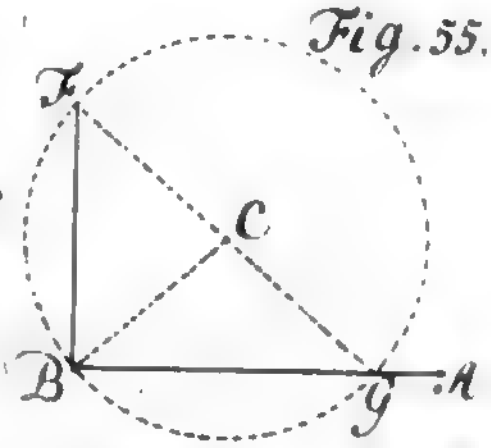


Fig. 55.



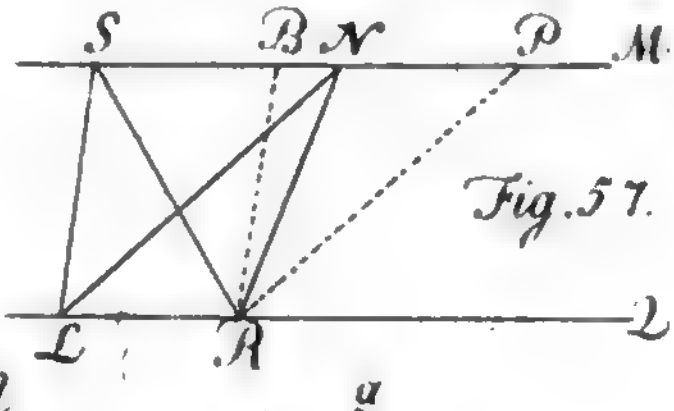


Fig. 57.

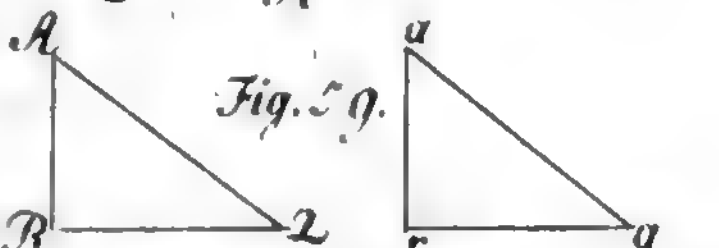


Fig. 59.

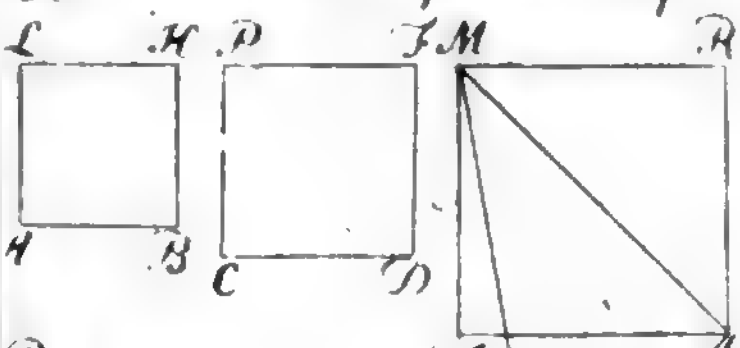
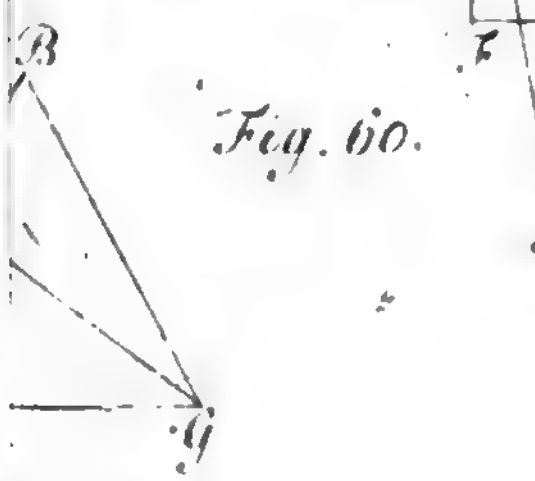


Fig. 60.



Digitized by Google

Tab. V.

Fig. 62.

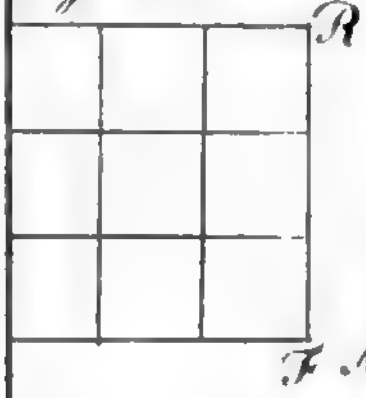
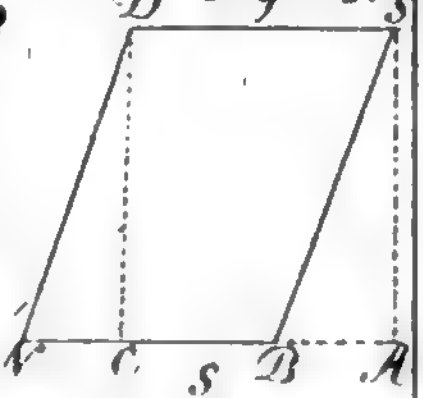


Fig. 63.



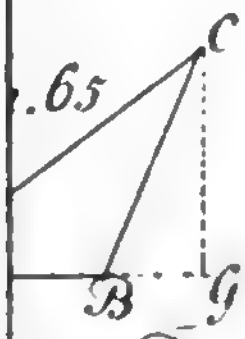


Fig. 66.

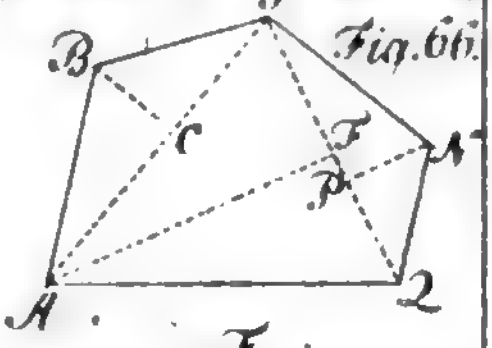


Fig. 69.

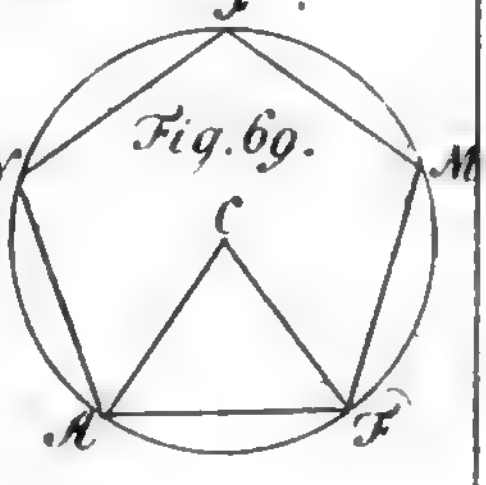
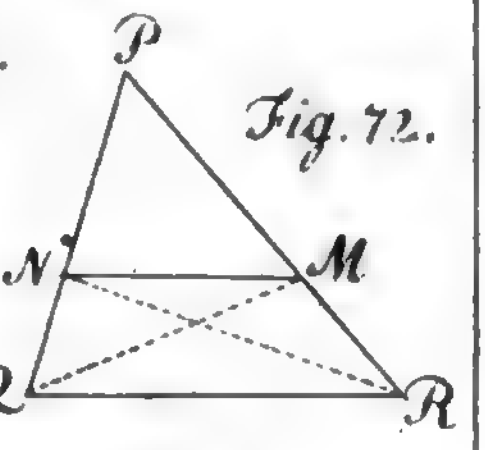
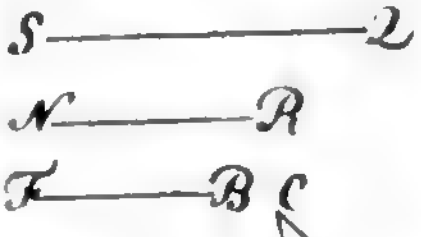


Fig. 71.

Fig. 72.





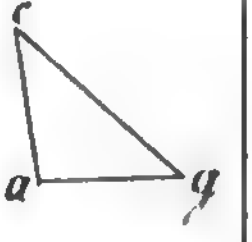


Fig. 74

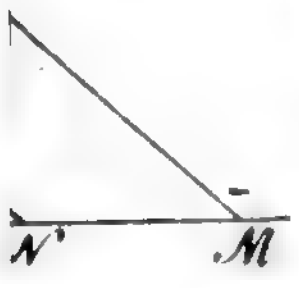
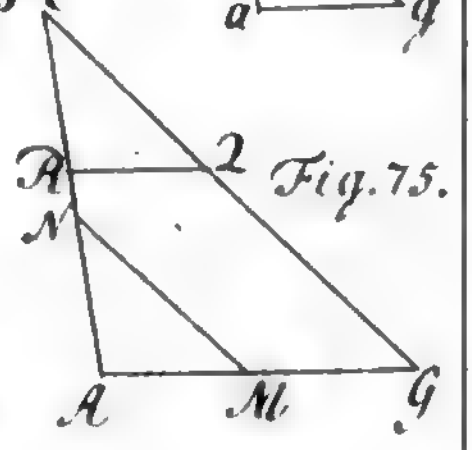


Fig. 75.



Digitized by Google

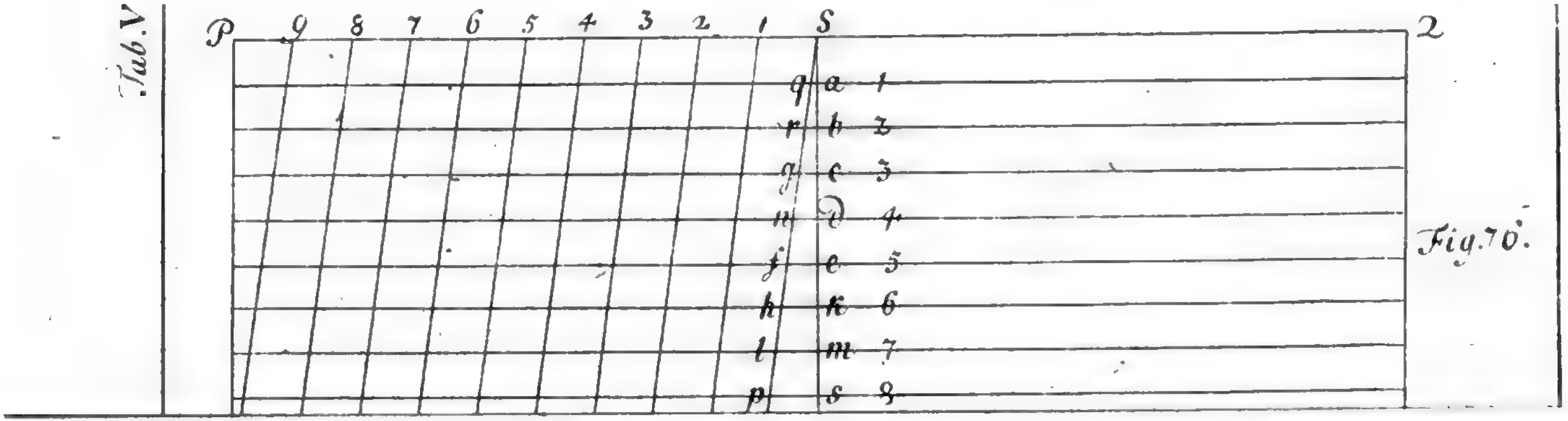


Fig. 70.

Digitized by Google

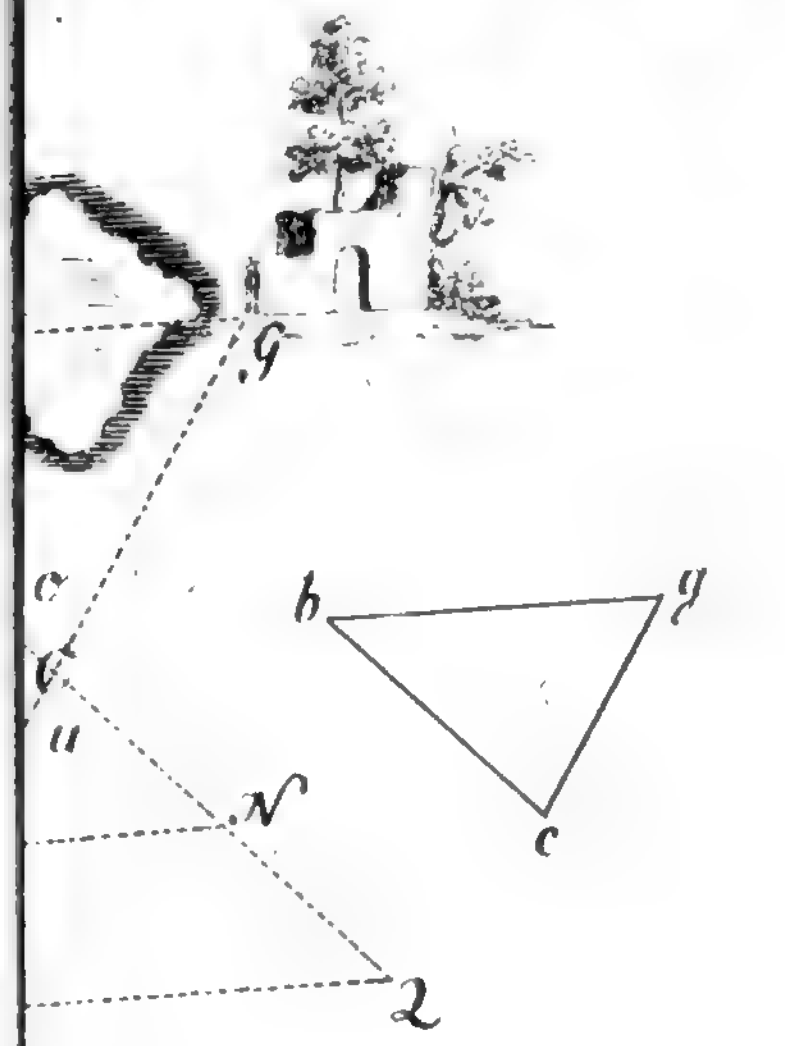
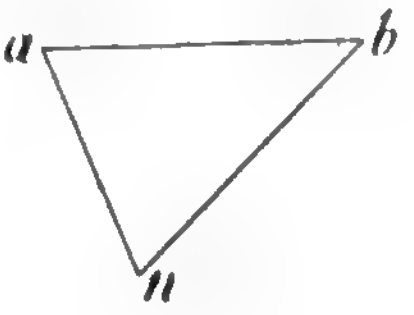
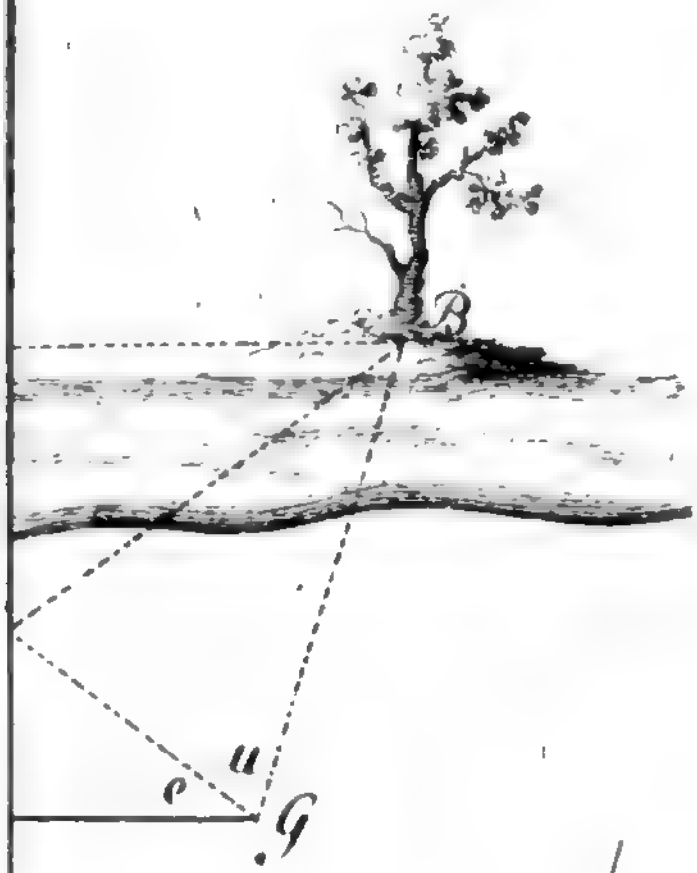
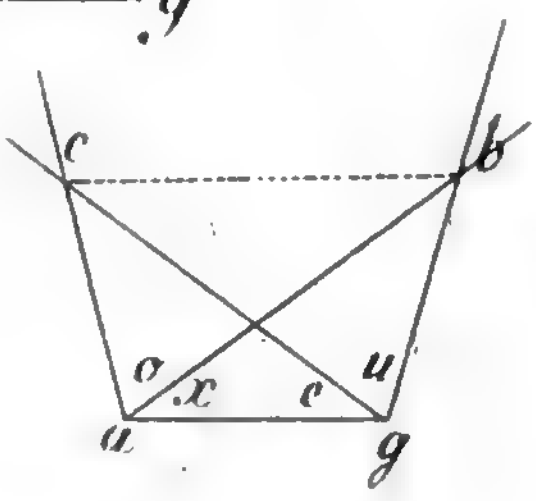


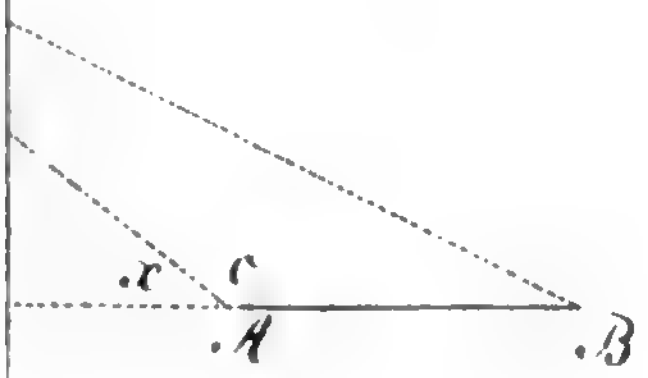
Fig. 81.

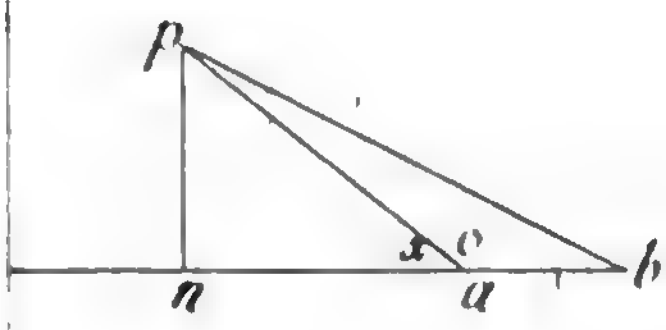


Digitized by Google


B
u
c
G


c
b
o
x
c
u
a
g


x
c
A
B


p
x
c
n
a
b

Digitized by Google

Fig. 84

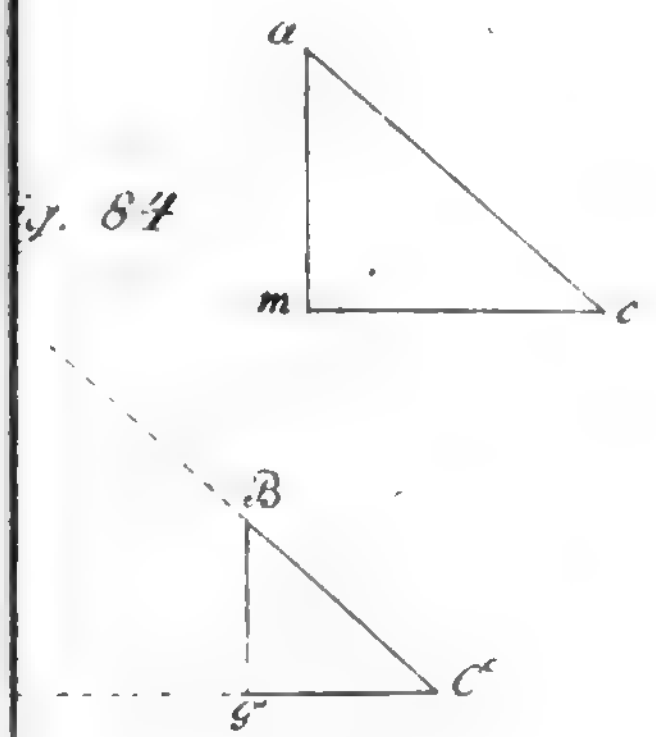
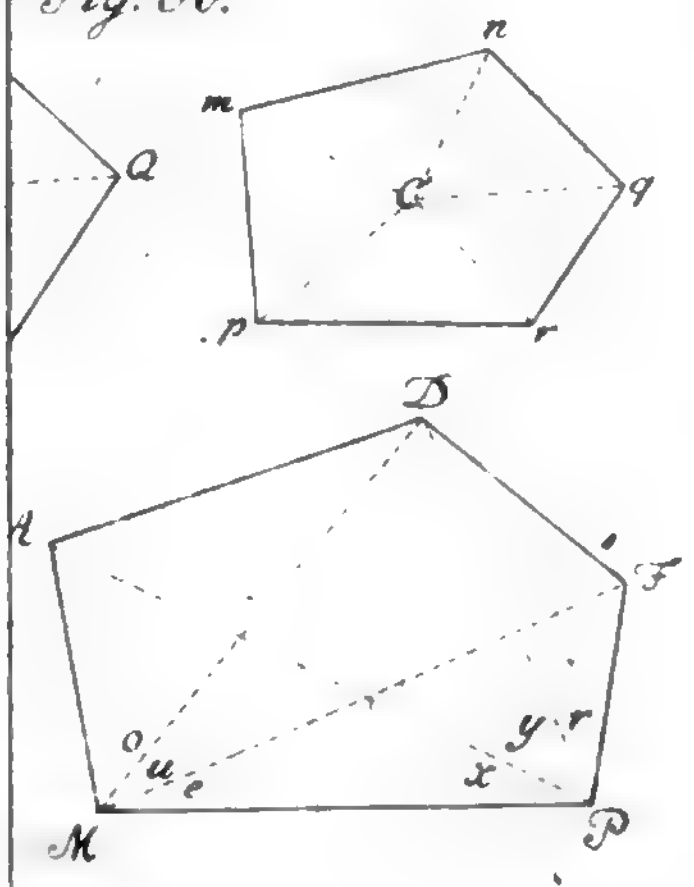
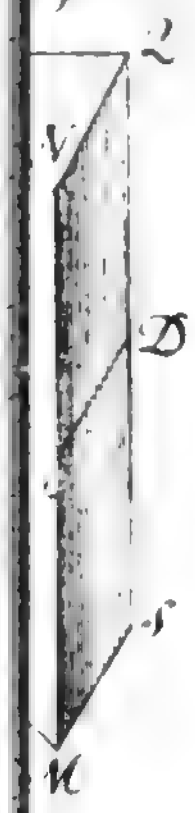


Fig. 86.



Digitized by Google

Fig. 88.



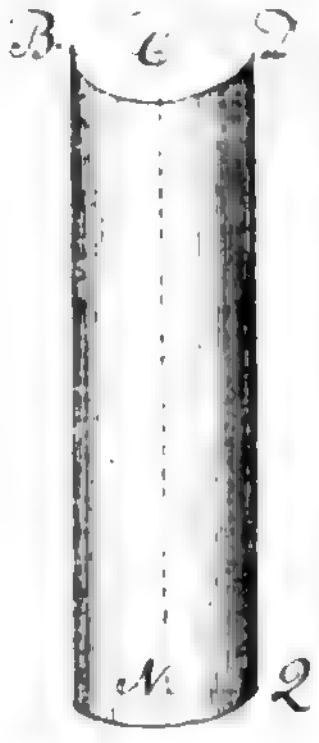


Fig. 90.

Fig. 92.

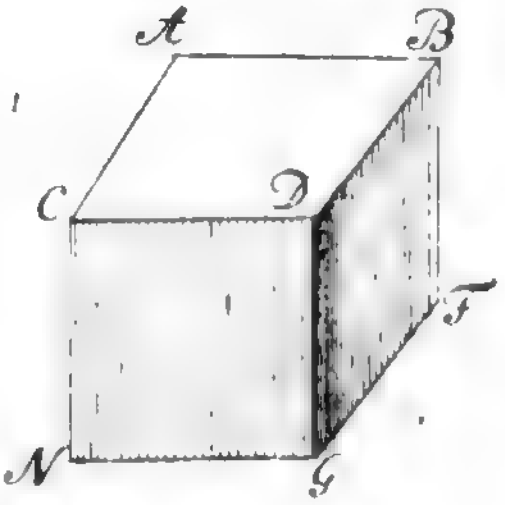
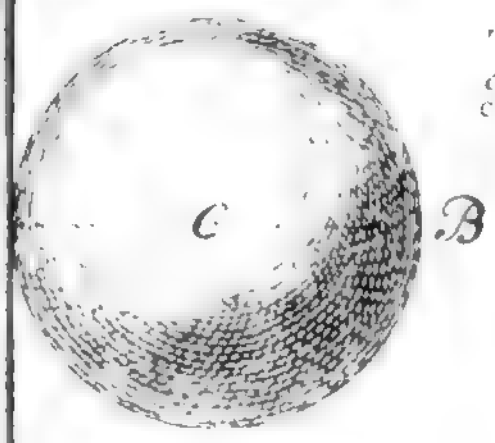
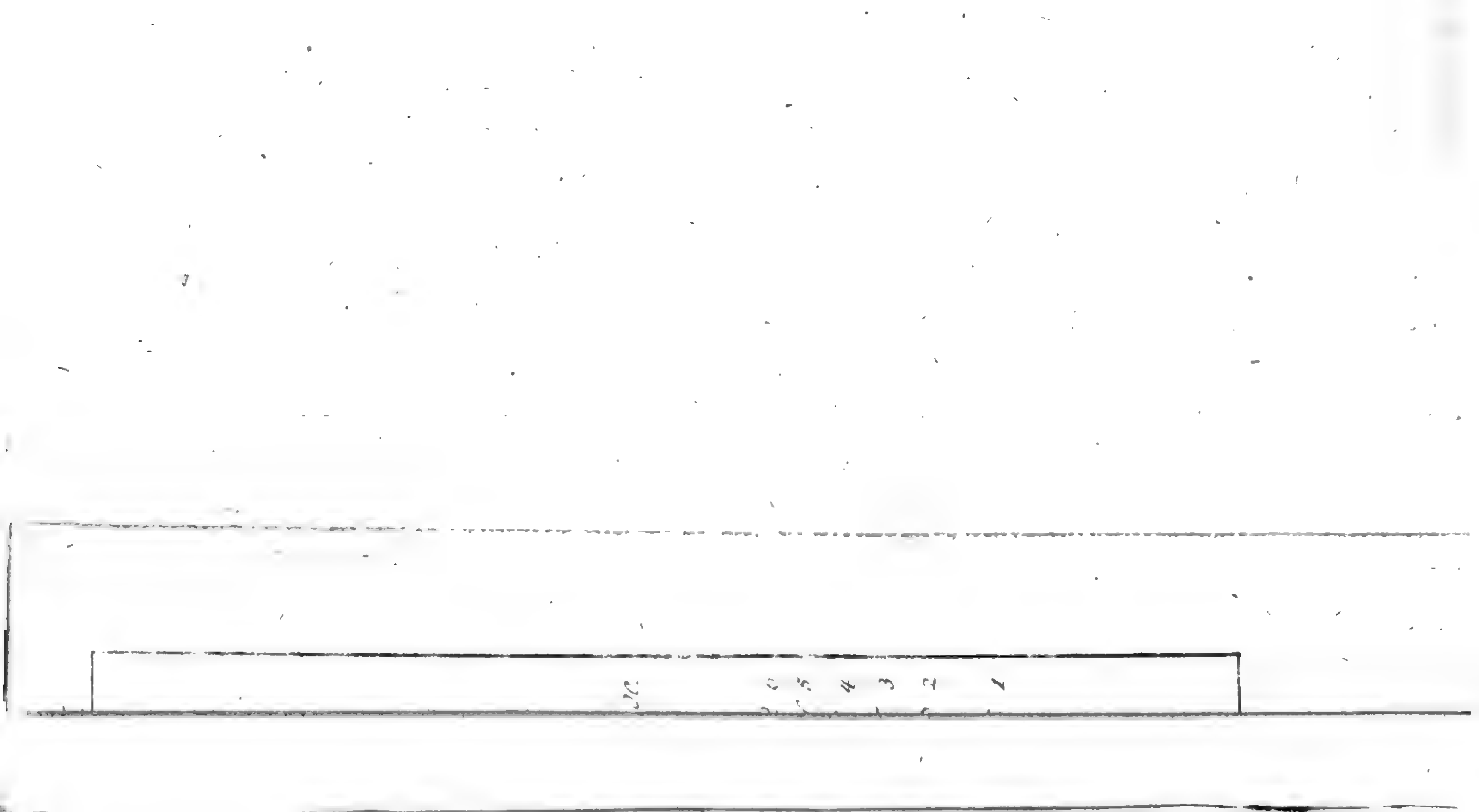


Fig. 93.



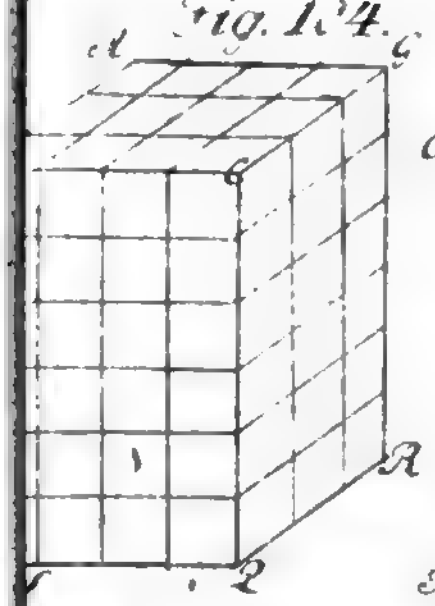
Digitized by Google



Digitized by Google

Tab XII.

Fig. 104.



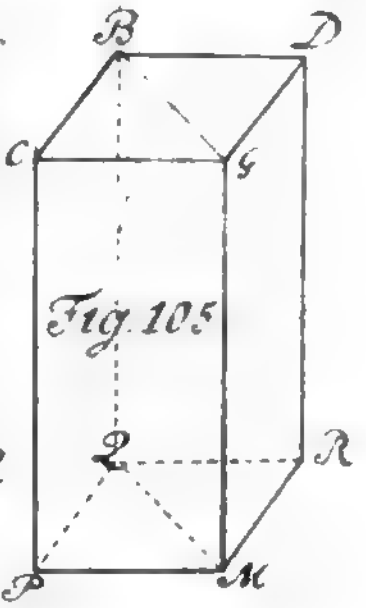
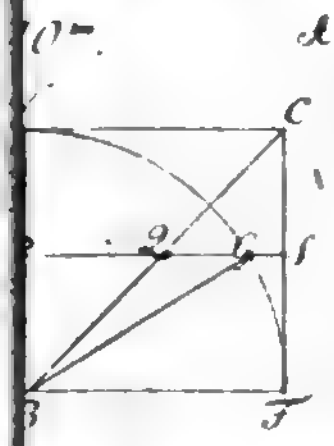


Fig. 105

Fig. 106



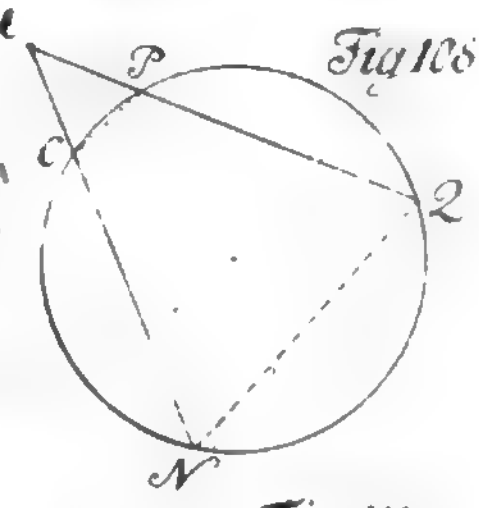


Fig. 112.

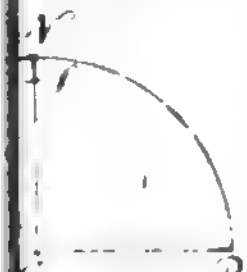


Fig. 111

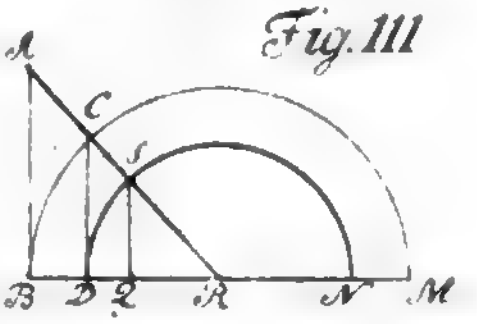


Fig. 113.

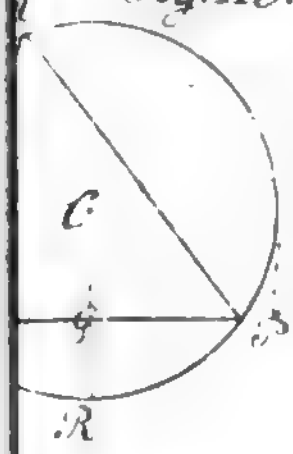


Fig. 114.

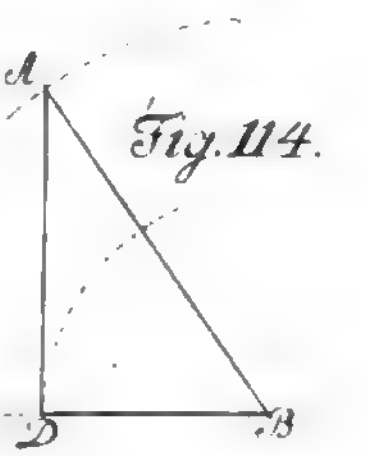
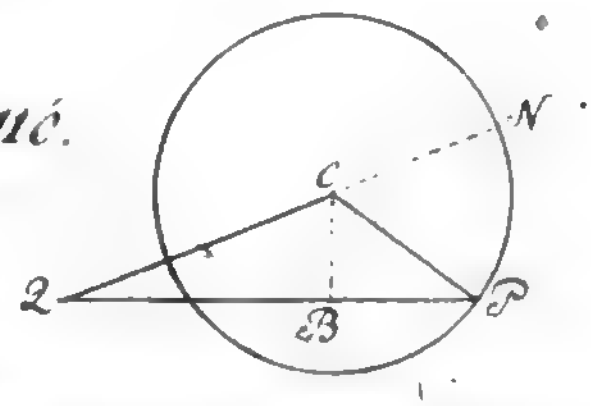


Fig 116.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

00565588

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google